



Universidad de Castilla-La Mancha
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Albacete



TESIS DOCTORAL

Modelo de elementos finitos
para el cálculo de arcos.
Validación en estructuras
agroindustriales de acero.

Directores:

Dr. D. Luis López García

Dr. D. Miguel Angel Garcimartín Molina

Doctorando:

D. Jesús Antonio López Perales

Noviembre 2003

Jesús Antonio López Perales

**MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL
CÁLCULO DE ARCOS. VALIDACIÓN EN
ESTRUCTURAS AGROINDUSTRIALES DE ACERO**

I.S.B.N. Ediciones de la UCLM
84-8427-371-7



Ediciones de la Universidad
de Castilla-La Mancha

Cuenca, 2005



Universidad de Castilla-La Mancha
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Albacete



Modelo de elementos finitos para el cálculo de arcos. Validación en estructuras agroindustriales de acero.

Tesis doctoral presentada por D. Jesús Antonio López Perales en cumplimiento de los requisitos necesarios para optar al grado de Doctor, dirigida por D. Luis López García y D. Miguel Angel Garcimartín Molina, Doctores Ingenieros Agrónomos.

Ciudad Real, noviembre de 2003

Doctorando

Jesús Antonio López Perales

VºBº

Luis López García

Miguel Angel Garcimartín Molina

Agradecimientos

Noviembre de 2003. Habiendo llegado a este punto realizo una mirada retrospectiva y compruebo la lejanía de aquella exposición de Torroja, principio de una apasionante inquietud que se ha ido cubriendo de respuestas en el transcurso de estos bonitos años y que espero se materialicen en futuros proyectos.

Salvo la persecución de un sentimiento continuo de culpa por no haber dedicado a mi familia el tiempo debido y por la sensación de abandono de los amigos, estos cuatro años han representado una sucesión de buenos momentos en el ámbito intelectual. Es por ello que quisiera comenzar dando las gracias por la paciencia manifestada a mi familia y mis amigos, con una intención clara de enmienda y con el deseo de un mejor reparto de las horas del día en tiempos venideros.

Por otro lado, quisiera manifestar mi profunda gratitud a las personas que han hecho posible la realización de este trabajo, y en especial:

Al Dr. D. Luis López García, Catedrático de Ingeniería Rural en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real (UCLM), por ser profesor, tutor, director, compañero y amigo desde que comencé los estudios de ingeniero técnico agrícola, allá por 1985 y al Dr. D. Miguel Angel Garcimartín Molina, Profesor Titular de Construcción en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Madrid (UPM) por asumir la dirección de esta tesis, por su disposición y por sus valiosos consejos.

Al Dr. D. Juan José López Cela, Profesor Titular de Mecánica de los Medios Continuos en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Ciudad Real (UCLM) por su inestimable colaboración en el manejo de ANSYS. A D. Pedro Jesús Alcobendas Cobo, a la Dra. D^a. Rocío Gómez Gómez, a D^a Asunción Sánchez Villalón y a la Dra. D^a. Marta María Moreno Valencia, Profesor Asociado de Ingeniería Agroforestal, Catedrático de Ingeniería Química, Profesora Titular de Filología Inglesa y Profesor Asociado de Producción Vegetal, respectivamente, en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real (UCLM) por su persistente ayuda.

Y sobre todo, y por todo, a la Dra. D^a. Amparo Moreno Valencia, Profesor Asociado de Ingeniería Agroforestal en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real (UCLM), mi mujer, mi compañera y mi amiga. Gracias por leer, corregir, releer y soportar el desarrollo de la tesis.

Por último, un recordatorio a un ser precioso que llenó de felicidad este tiempo y que nos dejó prematuramente, y que sin duda vivirá en nosotros por siempre. Gracias Lola.

Resumen

En el mundo de la ingeniería, desde siempre ha habido una gran atracción por la forma curva del arco y su fenómeno resistente. Su aparente sencillez y la pureza de la línea que configura su forma encierra una estructura que se adapta perfectamente para resistir cargas y vencer grandes luces.

Sin embargo, no es la forma curva la cualidad fundamental del arco, pues lo esencial de esta estructura se encuentra en los esfuerzos longitudinales de contrarresto, que se visualizan en los empujes horizontales sobre los apoyos, pese a que las cargas externas sean verticales.

En edificación agroindustrial el uso del arco ya denota la búsqueda de una estética que se aleje de la mediocridad general en el diseño que rige este tipo de estructuras. En arcos de cubierta predominan las sobrecargas variables frente a las cargas constantes, por lo que el intento de búsqueda de una directriz que se adapte al antifunicular de una determinada combinación de cargas pierde relevancia frente a otras consideraciones, como la estética, la singularidad de la edificación, la facilidad de doblado del acero bajo radio constante, etc.

La tipología estudiada se centra en arcos de acero con los extremos empotrados o articulados, con la posibilidad de que los apoyos estén a nivel o, por el contrario, que exista un desnivel entre las extremidades.

Continuando con parámetros de diseño, otro factor fundamental es el rebajamiento del arco, o relación entre flecha y luz, que va a tener influencia en el diseño y en los empujes en los apoyos. Compaginando ambos criterios, se decide estudiar arcos con relaciones comprendidas entre $1/5$ y $1/10$, recomendando el intervalo $1/6$ - $1/8$.

A la hora de estudiar métodos de cálculo, el estudio se inicia con el método de los desplazamientos, que resuelve la cuestión con una perspectiva pedagógica, al seguir las deformaciones el desarrollo del fenómeno físico correspondiente, a diferencia de los métodos engoblados bajo el nombre de energéticos, que hacen intervenir entidades no tangibles que remiten directamente a las expresiones fundamentales de la flexión, compresión y cortadura.

Especial hincapié se ha realizado en el estudio de los arcos mediante el método de los elementos finitos. Se desarrolla un modelo, denominado elemento de pórtico plano, en el que previamente se realiza una discretización del arco en elementos rectos. El elemento de pórtico plano se ha determinado

siguiendo los modelos de Timoshenko y de Euler-Bernoulli, obteniéndose todas las expresiones que se resumen en la matriz de rigidez completa del elemento.

Por último se analiza el pandeo de estas estructuras, comenzando por estudios empíricos para arcos concretos y continuando con la generalización y estudio del pandeo global mediante autovalores, obteniéndose la matriz de rigidez geométrica del arco. Además se introduce la base matemática para analizar el pandeo no lineal de los arcos.

Todo este análisis teórico se ha plasmado en la realización de aplicaciones informáticas para el estudio de la tipología mencionada, realizada en la hoja de cálculo Microsoft Excel, con el deseo de que pueda ejecutarse sin restricciones en la mayor parte de los ordenadores personales existentes, pues su uso puede calificarse de universal.

Así, en cuatro ficheros, «Arcos parabólicos empotrados», «Arcos parabólicos biarticulados», «Arcos circulares empotrados» y «Arcos circulares biarticulados», mediante la introducción del mínimo número de datos posible (luz, flecha, desnivel entre apoyos, características mecánicas del perfil seleccionado, cargas verticales, horizontales y térmicas) se efectúa el cálculo del arco correspondiente. Además de las solicitaciones máximas y de las reacciones en los extremos, se efectúa el cálculo del pandeo global del arco, realizado por el método de los autovalores.

De este modo se ha podido comprobar la coincidencia de los resultados obtenidos con estas sencillas hojas de cálculo con los que proporcionan paquetes de software altamente especializados, en los que la labor de introducción de datos puede llegar a convertirse en tediosa, pues la discretización del arco debe realizarse de forma manual, y la definición de los nudos y de las cargas representa un esfuerzo considerable.

También se ha obtenido la carga crítica de pandeo para distintos arcos biarticulados y biempotrados, con directrices circular y parabólica, de luces comprendidas entre 20 y 40 m, y con flechas que oscilan entre rebajamientos de 1/5 y 1/10, dimensionados con perfiles IPN 300 e IPN 400. Este modo de pandeo corresponde a la situación más habitual de carga vertical uniforme distribuida uniformemente a lo largo del eje del arco. También se incluyen tablas con los esfuerzos axiales críticos de pandeo en esas circunstancias, con el objeto de comparar los resultados con las expresiones proporcionadas por distintas normas y autores.

Además, mediante la aplicación informática ANSYS se ha podido calcular el pandeo no lineal de la estructura, lo que ha permitido determinar que los valores que se obtienen aplicando esta metodología son un 15-30 por ciento inferiores a los que consiguen aplicando el método lineal de los autovalores.

Summary

In the engineering world, the curved arch shape and its resistant phenomenon have always attracted great attention. Its apparent simplicity and the linear purity shaping its form involve a structure that is perfectly adapted to resist loads and overcome big spans.

However, it is not the curved shape the basic quality of the arch. The most important aspect of this structure resides in the longitudinal counteracting strengths that are shown in the horizontal reactions at supports, in spite of the vertical external loads.

In a agroindustrial construction, the use of the arch already reveals the searching of an aesthetics that moves away from the general mediocrity in the design governing this type of structures. In deck arches the variable overloads prevail over the constant loads, consequently the attempt to search a guideline adapted to the antifunicular of a determined combination of loads loses relevance if other considerations are kept in mind, such as aesthetics, building singularity, easiness of steel folded under a constant radius, etc.

The studied typology is focused on the fixed and two-hinged ended steel arches with the possibility that the supports are at level or, on the contrary, with an existing uneven level between the edges.

Continuing with design parameters, other important factor is the lowering of the arch, or the connection between the rise and the span, which influences the design and the horizontal strengths on the supports. Complementing both criteria, to study arches with rise-to-span ratios ranging between $1/5$ and $1/10$ was decided, recommending the $1/6$ - $1/8$ interval.

When dealing with calculation methods, the study starts with the displacement method, which solves the question with a pedagogical perspective by following the strain of the proper physical phenomenon, unlike the labelled methods under the name of energetics, with intervening non-factual entities that lead directly to the comprehensive expressions of the bending, compression and transverse shear.

Special emphasis has been placed on the study of the arches through the finite element method. A model known as plane frame element has been developed, where previously a discretization of the arch in straight elements has been carried out. The plane frame element has been determined following

the pattern of Timoshenko and of Euler-Bernoulli, obtaining all the expressions summarised in the stiffness matrix of the element.

Finally the buckling of these structures has been analysed, starting from empirical studies for specific arches and going on with the generalization and global buckling study by means of eigenvalue, obtaining the geometric stiffness matrix of the arch. Apart from that, the mathematical base is shown to analyse the non-linear buckling of the arches.

All these theoretical analyses have been shown in the elaboration of four computing applications for the study of the typology mentioned before, done in a spreadsheet called Microsoft Excel, with the aim that it can be fulfilled without any restrictions in most personal computers, since its use can be considered as universal.

Therefore, in the files «Fixed Parabolic Arches», «Two-Hinged Parabolic Arches», «Fixed Circular Arches» and «Two-Hinged Circular Arches», through the introduction of the possible minimal number of data (span, rise, unlevelled between supports, mechanical characteristics of the selected profile, vertical loads, horizontal and thermal), the proper calculation is done. Besides the maximum strengths and the reactions at supports, the global buckling of the arch has been calculated by means of the eigenvalue analysis.

In this way, it can be proven the coincidence of the results obtained by means of these four simple spreadsheets with the results provided by highly specialised packages, in which the work of inserting data can be so tedious, due to the fact that the discretization of the arch must be done manually and the definition of the nodal points and the load represents a considerable effort.

The critical buckling load for the different two-hinged and fixed ended parabolic and circular archs has also been obtained, with spans ranging between 20 and 40 m, and with rise-to-span ratios which vary from 1/5 to 1/10, measured with IPN 300 and IPN 400 profiles. This type of buckling corresponds to the most usual uniform vertical load uniformly distributed along the arch axis. There are also tables included with the critical axial strengths in those circumstances with the object of comparing the results with the expressions provided by different rules and authors.

Besides, by means of the computing application ANSYS, it has been possible to calculate the non linear buckling of the structure, which has allowed to determine that the values obtained applying this methodology are a 15-30 per cent inferior to those obtained applying the linear eigenvalue analysis.

índice

Capítulo 1.

El estado del arte.....	1
1. Introducción	3
2. El arco.....	8
2.1. Reconocimiento	8
2.2. La forma curva.....	9
2.3. En busca de la directriz óptima.....	10
2.4. Rebajamiento del arco.....	14
2.4.1. Diseño del arco.....	14
2.4.2. Empuje sobre los estribos	15
2.5. Tipología objeto de estudio.....	16
3. Bases de cálculo	16
4. Métodos de cálculo	19
4.1. Método de los desplazamientos	19
4.2. Métodos energéticos	24
4.3. Método de los elementos finitos	25
5. Pandeo de arcos	27

Capítulo 2.

Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos	31
1. Estructuras isostáticas auxiliares	33
1.1. La viga curva	34
1.2. El arco en voladizo o pescante	36
2. Cálculo de las deformaciones	38
3. Cálculo de las reacciones	42
4. Efecto de la temperatura.....	45
5. Centro elástico. Método abreviado de Muller-Breslau.....	48
6. Arcos hiperestáticos.....	52
6.1. Arcos biempotrados.....	52
6.1.1 Caso de arco simétrico	55

6.2. Arcos biarticulados	58
--------------------------------	----

Capítulo 3.

Cálculo de arcos por métodos energéticos.....	61
1. Introducción	63
2. Estructuras isostáticas auxiliares	63
2.1. Viga curva isostáticamente sustentada.....	64
2.2. Arco en voladizo	65
3. Arcos biarticulados.....	66
3.1. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación	71
3.2. Cálculo tabular	73
3.3. Arco parabólico biarticulado con inercia reducida constante y sometido a una carga uniforme según la cuerda	75
3.2. Efecto de la temperatura.....	80
4. Arcos biempotrados.....	82
4.1. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación	85
4.2. Arco parabólico doblemente empotrado, con inercia reducida constante.....	89
4.3. Efecto de la temperatura.....	94

Capítulo 4.

Estudio de arcos por el método de elementos finitos:

Elementos de pórtico plano de Timoshenko	97
1. Discretización del arco con elementos de pórtico plano	99
2. Teoría básica de la flexión de Timoshenko	101
2.1. Campo de desplazamientos	103
2.2. Campo de deformaciones.....	103
2.3. Campo de tensiones	105
2.4. Esfuerzos.....	106
2.5. Principio de los trabajos virtuales	108
3. Formulación de elementos finitos.....	109
3.1. Discretización del campo de movimientos	109
3.1.1 Introducción.	109
3.1.2. Elementos Lagrangianos	110
3.1.3. Formulación isoparamétrica.....	112

3.1.4.	Campo de movimientos	114
3.2.	Discretización del campo de deformaciones generalizadas	115
3.3.	Obtención de la matriz de rigidez local	117
3.3.1.	Integración numérica	119
3.3.2.	Matriz de rigidez local	121
3.4.	El efecto de bloqueo por cortante	124
3.4.1.	Introducción	124
3.4.2.	Estudio del efecto de bloqueo por cortante	125
3.4.3.	Integración reducida	127
3.4.4.	Módulo de rigidez residual	128
3.5.	Transformación a ejes globales	135
3.6.	Ensamblaje de las ecuaciones	137
3.7.	Cálculo de deformaciones y esfuerzos	138

Capítulo 5.

Estudio de arcos por el método de elementos finitos:

Elementos de pórtico plano de Euler-Bernoulli	139
1. Teoría básica de la flexión de Euler-Bernoulli	141
1.1. Condiciones de equilibrio	141
1.2. Campo de desplazamientos	142
1.3. Campo de deformaciones	144
1.4. Campo de tensiones	145
1.5. Relaciones constitutivas	145
1.6. Principio de los trabajos virtuales	146
2. Formulación de elementos finitos	147
2.1. Discretización del campo de movimientos	147
2.2. Discretización del campo de deformaciones generalizadas	151
2.3. Obtención de la matriz de rigidez local	152
2.4. Matriz de rigidez global y ensamblaje de ecuaciones	159
2.5. Obtención del vector de fuerzas equivalentes	159
2.5.1. Carga uniformemente distribuida $q_{x'}$	159
2.5.2. Carga uniformemente distribuida $q_{z'}$	161
2.5.3. Carga concentrada $P_{x'}$	162

2.5.4. Carga concentrada P_z'	163
2.5.5. Par concentrado M_x'	165

Capítulo 6.

Pandeo de arcos	169
1. Introducción	171
2. Métodos simplificados	172
2.1. Reglas CB-71 para cálculo de arcos biarticulados	173
2.2. Norma DIN-1052 para cálculo de arcos articulados	173
3. Arcos circulares sometidos a presión radial uniforme	174
3.1. Arcos biarticulados	177
3.2. Arcos biempotrados	179
4. Arcos con carga vertical y directriz parabólica	180
5. Método matricial	183
5.1. Bifurcación de equilibrio	183
5.2. Hipótesis de cálculo	185
5.3. Determinación de la carga crítica	186
5.4. Matriz de rigidez geométrica	188
5.4.1. Obtención de las formas modales de deformación	191
5.4.2. Obtención de los coeficientes de rigidez geométrica en coordenadas locales	197
5.5. Ecuación matricial, coeficiente crítico y forma modal de pandeo	201
5.6. Procedimiento operativo	202
6. Análisis de pandeo no lineal	203
6.1. Solución del problema	205
6.2. Procedimiento de Newton Raphson	207
6.3. Obtención de la solución no lineal con ANSYS	210

Capítulo 7.

Aplicación informática y validación de los resultados	215
1. Introducción	217
2. Arcos circulares y arcos parabólicos. Cálculos	219
2.1. Validación de resultados	223

3. Pandeo de arcos	240
3.1. Cálculo del pandeo mediante análisis de autovalores	240
3.1.1. Comprobación de resultados.....	253
3.2. Cálculo no lineal	255
4. Conclusiones	258
 Bibliografía	 263

índice de figuras

Capítulo 1. El estado del arte

Figura 1.1.	Tríptico de la exposición conmemorativa del centenario del nacimiento de Eduardo Torroja.....	3
Figura 1.2.	Maqueta del Hipódromo de la Zarzuela. Proyecto de E. Torroja (1935).....	4
Figura 1.3.	Maqueta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).....	4
Figura 1.4.	Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).....	5
Figura 1.5.	Detalle de la cubierta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).....	6
Figura 1.6.	Proyecto de Polideportivo (Rozalén, 2000).....	6
Figura 1.7.	Tríptico del Grupo Español de la IABSE anunciando un seminario sobre «Tendencias en normativa y diseño en estructuras metálicas de edificación»	7
Figura 1.8.	Inscripción en el templete funerario del Puente de Alcántara	8
Figura 1.9.	Carga vertical, componentes horizontales en las reacciones y esfuerzos longitudinales de contrarresto en un arco.....	9
Figura 1.10.	Ausencia de componentes horizontales en las reacciones bajo carga vertical en una viga curva isostática.....	10
Figura 1.11.	Elección de la directriz del arco.....	11
Figura 1.12.	Variación del empuje de un arco en función de su flecha	15
Figura 1.13.	Distribución de tensiones en una pieza prismática de directriz curva	17
Figura 1.14.	Arco en voladizo obtenido al liberar un apoyo.....	20
Figura 1.15.	Arco en voladizo con extremo libre unido al centro elástico.....	21
Figura 1.16.	Arco biempotrado cortado por la clave.....	21
Figura 1.17.	Variante para obtener arcos en voladizo a partir de un arco biempotrado	21
Figura 1.18.	Esfuerzos en una rebanada de arco bajo carga.....	23

Capítulo 2. Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos

Figura 2.1.	Estructuras isostáticas auxiliares	33
Figura 2.2.	Comparación arco biapoyado- viga curva	33
Figura 2.3.	Viga en arco	34
Figura 2.4.	Viga en arco y su proyección	36
Figura 2.5.	Arco en voladizo o pescante	37
Figura 2.6.	Arco en voladizo y su proyección	38
Figura 2.7.	Deformación que provoca N	39
Figura 2.8.	Deformación que provoca Q	39
Figura 2.9.	Deformación que provoca M	40
Figura 2.10.	Deformaciones según los ejes x, z	40
Figura 2.11.	Deformaciones provocadas por un giro $d\theta$	41
Figura 2.12.	Arco en ménsula con arranques a nivel	43
Figura 2.13.	Obtención de M, N y Q en un arco biempotrado	43
Figura 2.14.	Alargamiento uniforme de la directriz	46
Figura 2.15.	Deformación angular uniforme de la directriz	47
Figura 2.16.	Ejes elásticos en un arco simétrico	48
Figura 2.17.	Ejes elásticos en un arco asimétrico	50
Figura 2.18.	Deformaciones del centro elástico	51
Figura 2.19.	Alargamiento uniforme de la directriz (centro elástico)	55
Figura 2.20.	Arco biempotrado simétrico con carga simétrica	55
Figura 2.21.	Arco biempotrado simétrico con carga antimétrica	56
Figura 2.22.	Alargamiento uniforme de la directriz en un arco biempotrado simétrico	57
Figura 2.23.	Ejes elásticos en un arco biarticulado	59
Figura 2.24.	Alargamiento uniforme de la directriz en arcos biarticulados	60

Capítulo 3. Cálculo de arcos por métodos energéticos

Figura 3.1.	Aplicación del PTV para obtener la deformación horizontal	64
Figura 3.2.	Aplicación del PTV en arcos en ménsula	65

Figura 3.3.	Arco biarticulado.....	66
Figura 3.4.	Viga curva apoyada en dilatación en su extremo izquierdo.....	66
Figura 3.5.	Arco biapoyado.....	66
Figura 3.6.	Efectos de la causa deformadora.....	71
Figura 3.7.	Efectos de la causa virtual.....	72
Figura 3.8.	Obtención de δ_{11} mediante el PTV.....	73
Figura 3.9.	Construcciones para el cálculo tabulado de arcos.....	74
Figura 3.10.	Arco biarticulado parabólico bajo carga uniforme.....	75
Figura 3.11.	Polígono de presiones en un arco biarticulado rebajado.....	78
Figura 3.12.	Línea de presiones en un arco peraltado.....	79
Figura 3.13.	Momentos en una viga bajo carga uniforme.....	80
Figura 3.14.	Efectos del aumento de temperatura.....	81
Figura 3.15.	Efectos del empuje virtual $H_t=1$	81
Figura 3.16.	Arco en ménsula con arranques a nivel.....	82
Figura 3.17.	Arco biempotrado con arranques a nivel.....	83
Figura 3.18.	Deformación de un arco en voladizo ante cargas externas.....	85
Figura 3.19.	Deformación de un arco en voladizo ante un empuje horizontal H_1 unidad aplicado en el extremo libre.....	86
Figura 3.20.	Deformación de un arco en voladizo ante un empuje vertical V_1 unidad aplicado en el extremo libre.....	86
Figura 3.21.	Deformación de un arco en voladizo ante un par M_1 unidad aplicado en el extremo libre.....	86
Figura 3.22.	Arco parabólico biempotrado de inercia reducida constante: Secciones.....	89
Figura 3.23.	Reacciones que aparecen para un desplazamiento horizontal δ_1	91
Figura 3.24.	Reacciones que aparecen para un desplazamiento vertical Δ_1	92
Figura 3.25.	Reacciones que aparecen para un giro θ_1	93
Figura 3.26.	Ejes elásticos para el estudio del efecto de la temperatura.....	95
 Capítulo 4. Estudio de arcos por el método de elementos finitos: Elementos de pórtico plano de Timoshenko		
Figura 4.1.	Geometría de una arco plano.....	99

Figura 4.2.	Aproximación a la geometría real de un arco con diferente número de elementos rectos.....	100
Figura 4.3.	Discretización de un arco con elementos de pórtico plano	101
Figura 4.4.	Descomposición de una carga vertical uniformemente repartida con respecto a los ejes locales del elemento 1-2	101
Figura 4.5.	Deformación y giro de la sección normal a la fibra media de un elemento de pórtico plano, según la teoría de la flexión de Timoshenko	102
Figura 4.6.	Distribución de tensiones normales. La distribución supuesta coincide con la distribución exacta	105
Figura 4.7.	Distribución de tensiones tangenciales. La distribución a) es la distribución supuesta. En b) se muestra la distribución exacta	106
Figura 4.8.	Definición del sistema de coordenadas natural. Geometría real y normalizada del elemento	110
Figura 4.9.	Elemento de pórtico plano de dos nodos. Interpolación de los movimientos y funciones de forma	114
Figura 4.10.	Viga en voladizo. Análisis con un elemento de 2 nodos	125
Figura 4.11.	Ejes locales de un elemento y ejes globales de la estructura	135

Capítulo 5. Estudio de arcos por el método de elementos finitos: Elementos de pórtico plano de Euler-Bernoulli

Figura 5.1.	Elemento de pórtico plano sometido a cargas uniformes según los ejes x , z . Equilibrio de una rebanada aislada	142
Figura 5.2.	Discretización de un arco con elementos de pórtico plano	143
Figura 5.3.	Deformación y giro de la sección normal a la fibra media de un elemento de pórtico plano, según la teoría de la flexión de Euler-Bernoulli	143
Figura 5.4.	Convenio de signos para la tensión $\sigma_{x'}$, el momento flector $M_{x'}$, el esfuerzo axial $N_{x'}$ y el esfuerzo cortante $Q_{x'}$	145
Figura 5.5.	Elemento de pórtico plano de dos nodos	148
Figura 5.6.	Funciones de forma del elemento de pórtico plano de Euler-Bernoulli.....	151
Figura 5.7.	Esfuerzos en los extremos de un segmento de viga.....	156
Figura 5.8.	Carga uniformemente distribuida $q_{x'}$	160
Figura 5.9.	Carga uniformemente distribuida $q_{z'}$	161

Figura 5.10.	Carga concentrada $P_{x'}$	162
Figura 5.11.	Carga concentrada $P_{z'}$	164
Figura 5.12.	Par concentrado $M_{x'}$	165

Capítulo 6. Pandeo de arcos

Figura 6.1.	Pandeo de arcos biarticulados	173
Figura 6.2.	Pandeo de un arco circular sometido a presión radial uniforme.....	175
Figura 6.3.	Construcciones geométricas para analizar el pandeo en un tramo infinitesimal	176
Figura 6.4.	Pandeo de arcos circulares biarticulados sometidos a presión radial uniforme.....	177
Figura 6.5.	Empuje crítico en un arco	179
Figura 6.6.	Pandeo de arcos circulares biempotrados con carga radial uniforme	180
Figura 6.7.	Pandeo de arcos parabólicos biarticulados bajo carga uniforme	181
Figura 6.8.	Pandeo de arcos parabólicos biempotrados bajo carga uniforme.....	182
Figura 6.9.	Bifurcación del equilibrio en una barra cargada	184
Figura 6.10.	Influencia del esfuerzo axil sobre una barra ij	190
Figura 6.11.	Geometría de las deformaciones	191
Figura 6.12.	Forma modal de deformación para $\delta_2=1$	192
Figura 6.13.	Forma modal de deformación para $\delta_3=1$	193
Figura 6.14.	Forma modal de deformación para $\delta_5=1$	195
Figura 6.15.	Forma modal de deformación para $\delta_6=1$	196
Figura 6.16.	Solución de Newton-Raphson. Primera iteración.....	208
Figura 6.17.	Solución de Newton-Raphson. Segunda iteración	209
Figura 6.18.	«Load steps», «substeps» y «time».....	211
Figura 6.19.	Procedimiento de Newton-Raphson incremental	212

Capítulo 7. Aplicación informática y validación de los resultados

Figura 7.1.	Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga vertical uniforme.....	221
Figura 7.2.	Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.....	222

Figura 7.3.	Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga térmica	222
Figura 7.4.	Axiles en un arco parabólico biempotrado ante una carga vertical uniforme.....	222
Figura 7.5.	Momentos en un arco parabólico biempotrado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	223
Figura 7.6.	Esfuerzo cortante en un arco parabólico biempotrado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	223
Figura 7.7.	Axiles en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.....	223
Figura 7.8.	Momentos en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.....	224
Figura 7.9.	Cortante en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.....	224
Figura 7.10.	Axiles en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura.....	224
Figura 7.11.	Cortante en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura.....	225
Figura 7.12.	Momentos en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura.....	225
Figura 7.13.	Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga vertical uniforme.....	232
Figura 7.14.	Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme.....	232
Figura 7.15.	Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga térmica	232
Figura 7.16.	Axiles en un arco parabólico biarticulado ante una carga vertical uniforme.....	233
Figura 7.17.	Momentos en un arco parabólico biarticulado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	233
Figura 7.18.	Esfuerzo cortante en un arco parabólico biarticulado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	233
Figura 7.19.	Axiles en un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme.....	234
Figura 7.20.	Momentos en un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme.....	234
Figura 7.21.	Cortante en un arco parabólico biarticulado ante una carga	

	horizontal uniforme.....	234
Figura 7.22.	Axiles en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.....	235
Figura 7.23.	Cortante en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.....	235
Figura 7.24.	Momentos en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.....	235
Figura 7.25.	Análisis de pandeo no lineal en un arco circular biempotrado de 30 m de luz y 1/6 de rebajamiento	255
Figura 7.26.	Análisis de pandeo no lineal en un arco circular biarticulado de 30 m de luz y 1/8 de rebajamiento	256
Figura 7.27.	Análisis de pandeo no lineal en un arco parabólico biempotrado de 40 m de luz y 1/8 de rebajamiento	256
Figura 7.28.	Análisis de pandeo no lineal en un arco parabólico biarticulado de 40 m de luz y 1/7 de rebajamiento	257

índice de tablas

Capítulo 2. Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos

Tabla 2.1.	Coeficientes de carga	44
Tabla 2.2.	Coeficientes fijos	45

Capítulo 3. Cálculo de arcos por métodos energéticos

Tabla 3.1.	Cálculo tabulado de arcos.....	74
Tabla 3.2.	Significado del subíndice j y valor de \overline{M}	87
Tabla 3.3.	Significado del subíndice k y valor de M	87
Tabla 3.4.	Significado de δ_{jk}	87
Tabla 3.5.	Variación de inercia, sección y espesor en arcos parabólicos biempotrados de inercia reducida constante, para una sección rectangular y ancho constante	89

Capítulo 4. Estudio de arcos por el método de elementos finitos: Elementos de pórtico plano de Timoshenko

Tabla 4.1.	Raíces de los polinomios de Legendre y pesos correspondientes.....	120
Tabla 4.2.	Vigas de gran canto. Comparación de la integración reducida (un punto) e integración completa (dos puntos) para un elemento de viga lineal (Hughes, 2000).....	127
Tabla 4.3.	Vigas de canto normal. Comparación de la integración reducida (un punto) e integración completa (dos puntos) para un elemento de viga lineal (Hughes, 2000).....	127

Capítulo 6. Pandeo de arcos

Tabla 6.1.	Valores del coeficiente β en arcos biarticulados y triarticulados para distintos rebajamientos (Argüelles y col, 2000).....	174
------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Capítulo 7. Aplicación informática y validación de los resultados

Tabla 7.1.	Coordenadas de los nodos tras la discretización de un arco parabólico de 30 m de luz, 5 m de flecha y apoyos a nivel en diez tramos	220
Tabla 7.2.	Arcos parabólicos biempotrados. Desplazamientos en la hipótesis de carga vertical uniforme.....	221
Tabla 7.3.	Arcos parabólicos biempotrados. Desplazamientos en la hipótesis de carga horizontal uniforme.....	221
Tabla 7.4.	Arcos parabólicos biempotrados. Desplazamientos en la hipótesis de carga térmica	222
Tabla 7.5.	Arcos parabólicos biempotrados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga vertical	223
Tabla 7.6.	Arcos parabólicos biempotrados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga horizontal	224
Tabla 7.7.	Arcos parabólicos biempotrados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga térmica.....	225
Tabla 7.8.	Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga vertical.....	226
Tabla 7.9.	Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga horizontal.....	226
Tabla 7.10.	Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga térmica	226
Tabla 7.11.	Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga vertical uniforme.....	231
Tabla 7.12.	Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga horizontal uniforme.....	231
Tabla 7.13.	Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga térmica	232
Tabla 7.14.	Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga vertical	233
Tabla 7.15.	Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga horizontal	234
Tabla 7.16.	Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga térmica.....	235
Tabla 7.17.	Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga vertical.....	236

Tabla 7.18.	Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga horizontal.....	236
Tabla 7.19.	Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga térmica	236
Tabla 7.20.	Longitudes de arcos parabólicos (m)	241
Tabla 7.21.	Longitudes de arcos circulares (m)	242
Tabla 7.22.	Angulo α que forman en el arranque los arcos parabólicos (rad)	242
Tabla 7.23.	Angulo α que forman en el arranque los arcos circulares (rad)	242
Tabla 7.24.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biempotrados.....	243
Tabla 7.25.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biarticulados	243
Tabla 7.26.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biempotrados	244
Tabla 7.27.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biarticulados.....	244
Tabla 7.28.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg).....	245
Tabla 7.29.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg)	245
Tabla 7.30.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg).....	245
Tabla 7.31.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg)	246
Tabla 7.32.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg/m).....	246
Tabla 7.33.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg/m)	247
Tabla 7.34.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg/m).....	247
Tabla 7.35.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg/m)	247
Tabla 7.36.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biempotrados.....	249
Tabla 7.37.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biarticulados	249
Tabla 7.38.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biempotrados	249
Tabla 7.39.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biarticulados.....	250
Tabla 7.40.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg).....	250
Tabla 7.41.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg)	251
Tabla 7.42.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg).....	251
Tabla 7.43.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg)	251
Tabla 7.44.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg/m).....	252
Tabla 7.45.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg/m)	252
Tabla 7.46.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg/m).....	252
Tabla 7.47.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg/m)	253

Tabla 7.48.	Comparación entre las directrices circular y parabólica en arcos de 30 m de luz y 5 m de flecha, discretizados en 10 tramos.....	258
Tabla 7.49.	Comparación entre las directrices circular y parabólica en arcos de 40 m de luz y 5 m de flecha, discretizados en 10 tramos.....	259
Tabla 7.50.	Coeficiente K_{cr} para la determinación de la carga crítica q_{cr} en arcos simétricos	260

Capítulo 1

El estado del arte.

1.	Introducción	3
2.	El arco.....	8
2.1.	Reconocimiento	8
2.2.	La forma curva.....	9
2.3.	En busca de la directriz óptima.....	10
2.4.	Rebajamiento del arco.....	14
2.4.1.	Diseño del arco.....	14
2.4.2.	Empuje sobre los estribos	15
2.5.	Tipología objeto de estudio.....	16
3.	Bases de cálculo	16
4.	Métodos de cálculo	19
4.1.	Método de los desplazamientos	19
4.2.	Métodos energéticos	24
4.3.	Método de los elementos finitos	25
5.	Pandeo de arcos	27

Capítulo 1

El estado del arte.

1. Introducción.

1999. Centenario del nacimiento de Eduardo Torroja Miret. La recién creada Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos logra que la exposición itinerante organizada para conmemorar el evento recale en Ciudad Real.

El marco en el que se ubicó la exposición sólo consiguió reforzar la sensación de belleza y equilibrio de la obra de Torroja. El rehabilitado edificio del Rectorado de la Universidad de Castilla-La Mancha, antigua Casa de la Caridad de Ciudad Real, y su Paraninfo, albergaban fotografías, cuadros, réplicas de documentos y maquetas que, entre los gruesos muros, las amplias ventanas, la deliciosa iluminación y el suave crepitar de la madera del suelo ante los pasos del visitante, le acercaban a las reflexiones del rememorado ingeniero.



Figura 1.1. Tríptico de la exposición conmemorativa del centenario del nacimiento de Eduardo Torroja.

Mi conocimiento sobre Torroja hasta ese momento era muy limitado, pues únicamente relacionaba su nombre con el hormigón armado, y más

concretamente con el momento tope. Sin embargo, el evento conmemorativo me presentó la obra de un Ingeniero, que se recorría a través de dieciseis proyectos con comentarios del autor, reflexiones que se digerían con fruición y que invitaban a más.



Figura 1.2. Maqueta del Hipódromo de la Zarzuela. Proyecto de E. Torroja (1935).

Los enormes paneles de bonito diseño, repletos de facsímiles de proyectos y de fotografías de distintos momentos en la ejecución de las obras, dividían la estancia en zonas gobernadas por una idea o un proyecto, de manera que el laberinto artificial creado entre la obra de Torroja acabó desembocando en una profunda atracción. Atracción por las formas, por las soluciones y por la persona.

Y quizás, a pesar de la pureza de las líneas de sus estructuras laminares, a pesar de sus avanzadas propuestas para solucionar los problemas que surgían en sus singulares estructuras, lo que más llamó la atención al reiterativo visitante fue un pequeño hangar, situado en el aeródromo de Cuatro Vientos.

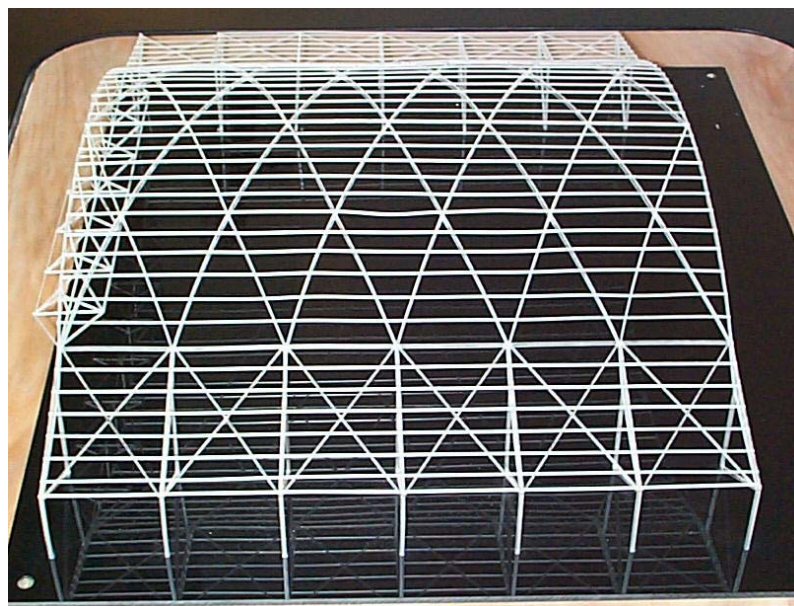


Figura 1.3. Maqueta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).

El Ministerio de Fomento, con motivo del centenario del nacimiento del ingeniero, editó *Las estructuras de Eduardo Torroja*, una obra de 1958 publicada en inglés, con poca difusión en nuestro país. Con respecto al Hangar de Cuatro Vientos, Torroja escribe:

«Las correas de la cubierta de este hangar apoyan sobre arcos metálicos de 35 metros de luz, que se cruzan entre sí formando una bóveda reticulada de gran rigidez, capaz de soportar el empuje de viento sobre los cerramientos verticales.

Los arcos descansan sobre ménsulas que arrancan de pórticos laterales. Sin embargo, el empuje horizontal de los arcos no es soportado por estos pórticos, sino que se transmite a los de los extremos, los cuales, triangulados para tener la rigidez necesaria, son capaces de soportar la suma del empuje horizontal de todos ellos. En consecuencia, cada una de las dos mitades de la estructura de cubierta trabaja como una especie de viga triangulada inclinada, apoyada contra su gemela, de gran rigidez a pesar de su ligereza.»



Figura 1.4. Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).

En el Hangar de Cuatro Vientos Torroja logra con estructura metálica el equilibrio entre estética y resistencia. La aparente sencillez de la estructura, la belleza proporcionada por los arcos cruzados que arrancan del voladizo de los pórticos laterales, me seducen. La necesidad de comprender las soluciones constructivas adoptadas me llevan a contactar con la dirección de AENA, organismo responsable del aeródromo de Cuatro Vientos, con la intención de visitar el hangar. La sorpresa por el buen estado de conservación de la edificación es grande, destinada en la actualidad a taller de reparaciones de helicópteros de la Guardia Civil. *In situ* se pudo realizar una análisis inicial de la

estructura y detectar modificaciones estructurales respecto a la documentación conseguida.



Figura 1.5. Detalle de la cubierta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).

La admiración creció aún más al profundizar en el cálculo, pues la actividad docente del autor le llevó a codirigir un proyecto fin de carrera en el cual se adaptaba la estructura del hangar a un polideportivo (Rozalén, 2000), adecuando las soluciones constructivas de Torroja a los condicionantes económicos actuales.

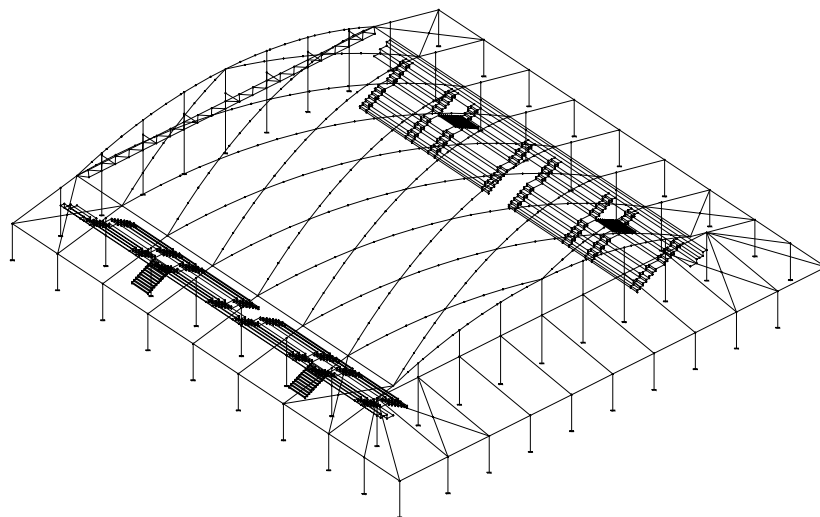


Figura 1.6. Proyecto de Polideportivo (Rozalén, 2000).

En esta época, sumido en el estudio de los arcos, me sorprendió recibir un folleto del Grupo Español de IABSE (International Association for Bridge and Structural Engineering) que, sobre una fotografía que transformaba sus grises originales en ocres, anunciaba un seminario sobre «Tendencias en normativa y

diseño en estructuras metálicas de edificación». La imagen recogía un aspecto del montaje de la estructura del hangar de Torroja, con lo que comprendía que la seducción de las formas resistentes y armónicas de esta estructura de acero sobrepasaría con creces el siglo de su creación.

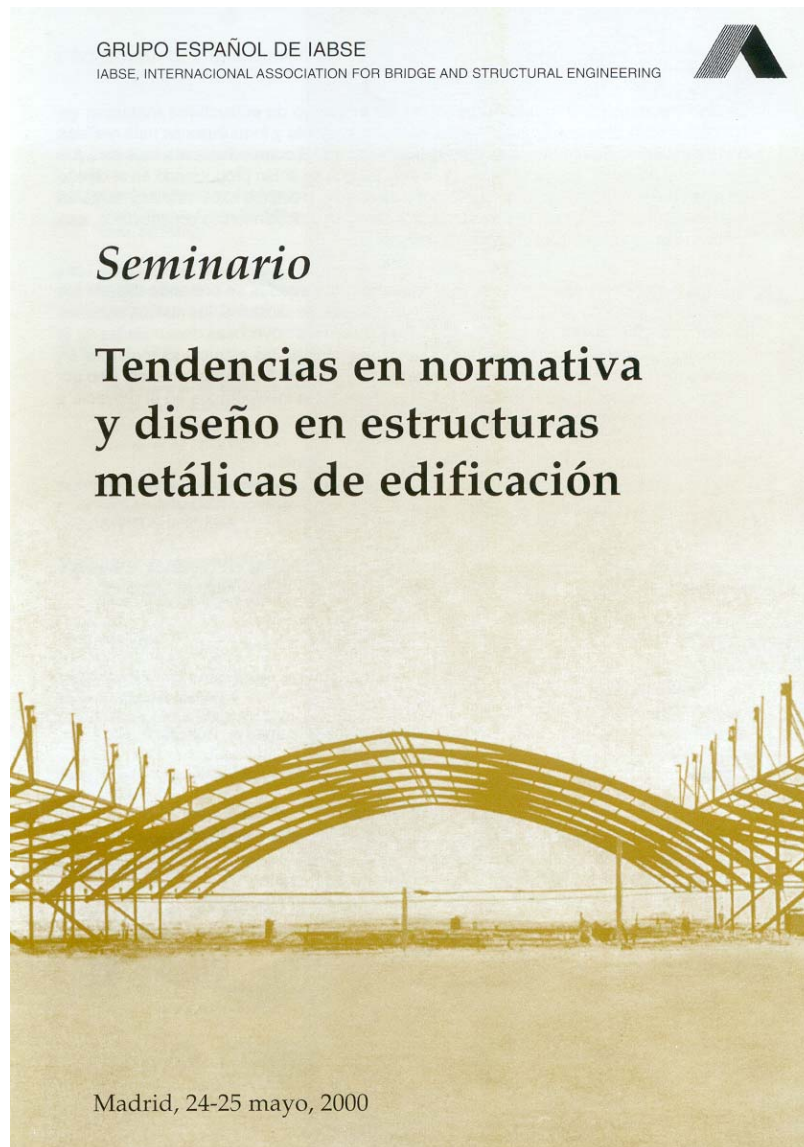


Figura 1.7. Tríptico del Grupo Español de la IABSE anunciando un Seminario sobre «Tendencias en normativa y diseño en estructuras metálicas de edificación».

El profundo conocimiento del comportamiento estructural de las formas y materiales de Torroja provenía de una laboriosidad proporcional a su ingenio. Así, se conservan los expedientes de proyectos que no se llevaron a cabo, que ponen de manifiesto el control y el rigor de los estudios realizados por Torroja. Bajo el título de *Hangares desmontables*, proyectos que se realizaron en los años cuarenta para la empresa OMES, de la que el propio Eduardo Torroja fue fundador, se proponían procesos de prefabricación y montaje que anticipaban

la solución adoptada para el Hangar de Cuatro Vientos (Antuña y Pedregal, 2002).

De este modo se gestó el deseo de estudiar el elemento constructivo responsable del aspecto liviano de esta cubierta y de su equilibrada estética: el arco.

2. El arco.

2.1. Reconocimiento.

Existe una definición de arco, debida a Cayo Julio Lácer, el ingeniero romano que proyectó el puente de Alcántara en el año 106, grabada en la piedra del templete funerario que domina el puente desde su orilla izquierda, que recoge de una manera escueta el mecanismo resistente de estas estructuras: *Ars ubi materia vincitur ipsa sua* (*En el arco la materia se vence a sí misma*).



Figura 1.8. Inscripción en el templete funerario del Puente de Alcántara.

Recuperando esta clásica definición de arco se procura hacer ver que el tema de los arcos no es ninguna novedad en el mundo de la ingeniería, pues desde siempre ha habido una gran atracción por el arco y su fenómeno resistente. Sin embargo, hasta bien entrado el siglo XIX no se aplicaron técnicamente los conceptos elementales de la estática gráfica, equilibrio y antifunicularidad. De cualquier forma, independientemente de la aplicación práctica de estos *modernos* conceptos, siempre se reconocerá el arco como el mayor invento tensional del arte clásico (Torroja, 1996).

Torroja (1996), en su admiración por esta sencilla estructura (al menos en apariencia), llega a afirmar:

«Si la columna es arquitectura pura, el arco es ingeniería; o mejor dicho, -para alejar toda interpretación profesional-, si la columna es arte, el arco es técnica; sin que esto quiera decir, ni que a la columna le falte técnica, ni que el arco sea incapaz de vivísima expresión estética».

El arco, como antesala de la bóveda, tal vez sea la estructura más brillante que pueda ser concebida (Regalado, 1999).

2.2. La forma curva.

A primera vista aparece como cualidad fundamental del arco su forma curva. Sin embargo, esto resulta insuficiente, pues si se apoya isostáticamente una barra arqueada sólo se dispondrá de una viga curva, no de un arco. Hay que considerar las condiciones de sustentación y entonces se encontrará lo esencial de la estructura arco, la existencia de esfuerzos longitudinales de contrarresto, que son los que determinan su forma (Fernández Casado, 1955).

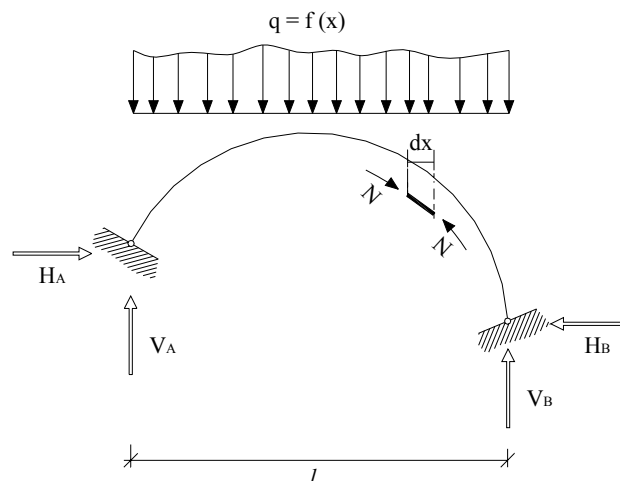


Figura 1.9. Carga vertical, componentes horizontales en las reacciones y esfuerzos longitudinales de contrarresto en un arco.

Es típico del arco generar empujes horizontales sobre los apoyos. La existencia de estas componentes horizontales en las reacciones, pese a que las cargas externas sean verticales, es un hecho que caracteriza a los arcos y los diferencia de las vigas. Los empujes se deben a la imposibilidad de desplazamiento de los estribos, y no a la forma curva de la pieza, ya que los empujes bajo cargas verticales no aparecen si faltan los estribos que impidan la apertura del arco (Argüelles, 1996).

En esencia, ni siquiera la forma curva es necesaria, pues en sentido amplio empieza por ser arco un par de barras acodadas, y se podría incluir en el género las arcadas, los pórticos y otras estructuras reticulares (Fernández

Casado, 1955). Sin embargo, en el estudio que sigue se va a restringir el tipo utilizando precisamente la forma curva, pero no en cuanto se refiere a condiciones puramente geométricas, sino en relación con su adecuación mecánica.

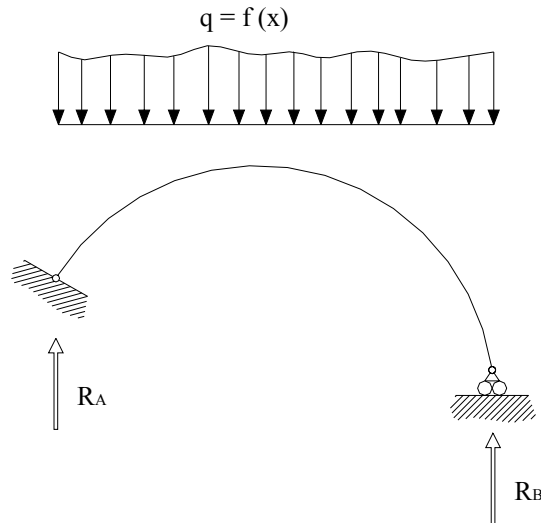


Figura 1.10. Ausencia de componentes horizontales en las reacciones bajo carga vertical en una viga curva isostática.

2.3. En busca de la directriz óptima.

Al contrario que en las estructuras reticulares, cuya morfología queda determinada por las condiciones funcionales, en el arco imperan las condiciones estructurales, hasta tal punto que muchas veces la estructura ha de complementarse por exigencias de la función a que está destinada. Por consiguiente, como toda estructura lineal con libertad mecánica, el arco tiene la pretensión de ser configuración de esfuerzos, es decir, funicular de las fuerzas aplicadas. El grado mayor o menor en que esto se logra define la perfección de la estructura. La adecuación total se consigue en muy pocos casos, pues casi siempre lo impide el carácter variable de la sobrecarga (Fernández Casado, 1955).

Para cada conjunto de cargas existe una forma particular (la llamada forma funicular), para la cual todo el arco trabaja a compresión simple. Esta forma puede determinarse colgando las cargas de un cable e invirtiendo la curva resultante. Los arcos funiculares ocupan un extremo de la escala de tensiones, con ausencia de flexión. Cualquier otro elemento estructural curvado hacia abajo resiste las cargas por medio de una combinación de compresión y flexión. Aunque un arco sea funicular para *un* sistema determinado de cargas, no puede serlo para *todos* los sistemas de cargas que pueda estar llamado a resistir: en todo arco existe siempre una combinación de compresión y flexión (Salvadori y Heller, 1998).

Además de las cargas permanentes, las estructuras han de soportar otras cargas variables y/o móviles, por lo que sólo es posible hacer coincidir el eje del arco con el funicular de una determinada posición de la carga exterior y, por consiguiente, no se puede evitar la aparición de momentos flectores en cuanto se modifique la hipótesis de carga (Argüelles, 1981).

Mörsch propuso en 1906 que la directriz de los arcos coincidiera con el funicular de los pesos permanentes. El problema estriba en que para adaptarse a esta curva es necesario conocer a priori la forma y dimensiones de la estructura, por lo que sólo mediante aproximaciones sucesivas se alcanza la solución apropiada.

El peso por metro lineal que carga sobre los arcos aumenta desde la clave a los estribos (figura 1.11 a) y por ello la curvatura de los arcos debería aumentar de forma análoga para ajustarse a la curva funicular.

Si el peso fuese constante, la directriz que se ajustaría al funicular sería una parábola cuadrada.

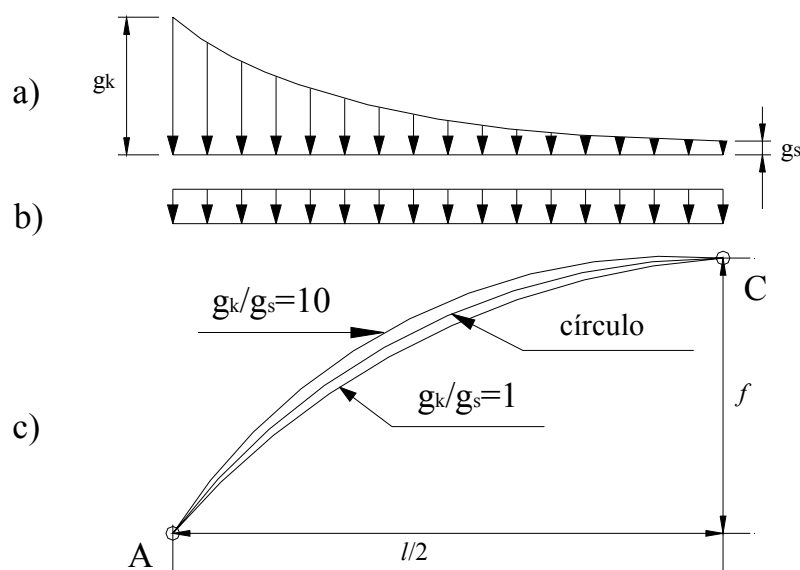


Figura 1.11. Elección de la directriz del arco.

Si se designa por g_k al peso del metro lineal en el estribo, y por g_s al peso del metro lineal en la clave, se puede comprobar que cuanto mayor es g_k con respecto a g_s la curva funicular se levanta. Así, para un arco de luz l y flecha f , en la figura 1.11 c se representan las dos directrices que corresponden a una carga uniformemente repartida (figura 1.11 b) y a una carga en que la relación

$\frac{g_k}{g_s}$ es igual a 10 (figura 1.11 a), caso que en la práctica constituye un valor extremo. El arco circular se sitúa entre ambas directrices.

Para realizar los tanteos en la elección del eje del arco se comienza eligiendo como directriz una curva comprendida entre la parábola y el círculo y se calculan los pesos permanentes de los diversos tramos en que queda dividido el arco, trazándose a continuación el funicular que pase por los puntos A y C (figura 1.11 c). Elegido este funicular como nuevo eje del arco, se vuelven a calcular los pesos correspondientes y el funicular que les corresponde. En la mayor parte de los casos este segundo funicular se admite como eje del arco, ya que nuevos tanteos no dan lugar a diferencias apreciables (Argüelles, 1986).

Moseley y Mery formularon de forma explícita la condición de estabilidad de un arco: basta con que la línea de presiones se encuentre contenida entre las dos líneas que definen el espesor del arco, haciendo trabajar el material a 1/10 de su tensión de rotura.

En el campo de los puentes es donde se puede percibir una mayor inquietud en buscar una cierta antifunicularidad en el diseño de los arcos, si se observan en paralelo a los construidos en la edificación, donde prevalecen criterios mucho más formalistas, sin que ello quiera decir que los puentes se hayan mantenido al margen de las modas arquitectónicas.

Existe abundante literatura sobre la elección de la directriz conveniente del arco. Este tema cobra especial relevancia cuando se trata de grandes luces y fuertes cargas muertas. Aparte del rebajamiento, que suele venir impuesto por condiciones no de tipo resistente, la forma de la directriz viene influida por las cargas muertas y por el tipo de sobrecarga viva que haya de soportar el arco. Los esfuerzos térmicos o de retracción no influyen sensiblemente en la determinación de la directriz (Torroja, 1996).

Para pesos propios del arco solamente y con espesor constante, el funicular es la catenaria. Para carga uniformemente repartida a lo largo de la cuerda, la directriz teórica es la parábola de segundo grado. En la práctica de puentes, con el peso del tablero, tímpanos más o menos aligerados y arcos de espesor variable, van bien las parábolas de cuarto o mejor de sexto grado, como suficiente aproximación a la ley teórica en coseno hiperbólico según Strassner. Cuando la sobrecarga móvil es fuerte respecto al peso propio, la forma de la directriz pierde importancia y lo que se puede hacer es tantear los funiculares y leyes de tensiones máximas para elegir una directriz apropiada (Torroja, 1996).

Los arcos parabólicos tipo Chalos y los arcos tipo Manning también tuvieron gran aceptación en el diseño de puentes durante gran parte del siglo XX.

En los arcos de cubierta, la sollicitación más desfavorable para las condiciones de funicularidad de la directriz es la actuación de viento, pues da lugar a una distribución continua de cargas con presiones y succiones que se aproxima mucho a la distribución antimétrica. Como además éstas se invierten al invertir el sentido de actuación del viento, se tienen siempre momentos flectores de importancia. Si la distribución de cargas del viento fuera perfectamente antimétrica, resultaría la directriz más conveniente la que realiza el antifuncular de la carga permanente, pues las líneas de presiones se desviarían por igual a ambos lados de dicha directriz al actuar el viento en uno u otro sentido. Pero el efecto de las succiones es más importante que el de las presiones, por lo que conviene peraltar el arco en su zona central (Fernández Casado, 1955).

La entrada masiva del acero y del hormigón armado como materiales básicos estructurales produjo una gran revolución en el arte de diseñar y construir los arcos. Estos materiales de gran resistencia, capaces de resistir las tracciones, han hecho posible que las estructuras se aligeren considerablemente de peso frente a las sobrecargas de uso variable, por lo que el trazado de una curva antifuncular resulta ya muy difícil.

Cuando en edificación agroindustrial se recurre a la estética y resistencia del arco, ya denota en el proyectista la búsqueda de una imagen de calidad que destaque sobre la mediocridad general del diseño en el ámbito agroindustrial. Además, las dimensiones que se manejan en este tipo de estructuras, por importantes que puedan ser dentro del campo de la edificación, siempre serán discretas respecto a la construcción civil, sobre todo si se comparan con el uso del arco que se realiza en el trazado de puentes, pasarelas, etc.

Por ello, y teniendo en cuenta el predominio de las sobrecargas variables frente a las cargas constantes, la búsqueda de una directriz que satisfaga una determinada hipótesis de carga pierde relevancia frente a otras consideraciones, como la estética, la singularidad de la edificación, la facilidad del doblado del acero bajo radio constante, etc.

De este modo, la búsqueda de una directriz que se ajuste al funicular de una determinada combinación de cargas no ha tenido el mismo desarrollo en el campo de la edificación que en el campo de la construcción de puentes, donde el factor de escala y la importancia de la magnitud de las cargas, así como la evolución en los materiales de construcción, hacía aconsejable el intento de minimizar la flexión frente a la compresión.

2.4. Rebajamiento del arco.

En un arco cualquiera se denomina *línea de arranque* a la línea que une los puntos de apoyo del arco, *luz* (l) a la distancia horizontal entre los apoyos y *flecha* (f) a la máxima distancia vertical desde la línea de arranque a la directriz. Si el arco es simétrico, la flecha será la distancia entre el punto más alto de la directriz, la *clave*, y la línea de arranque.

Con respecto a este parámetro fundamental en el diseño del arco, el rebajamiento, que determina la relación entre la flecha del arco y su luz, existen dos características íntimamente unidas a la decisión del proyectista de fijar esta magnitud: la estética y el valor del empuje sobre los estribos.

2.4.1. Diseño del arco.

En lo que se refiere a diseño, para determinar una relación entre la flecha y la luz en los arcos que sirva como tanteo inicial, existe concordancia entre los diversos autores. Así, Torroja (1996) consideró un intervalo comprendido entre $1/5$ y $1/7$, valor este último que Regalado (1999) aumenta a $1/8$, que es la relación más satisfactoria visualmente, mientras que asegura que $1/5$ es la más eficaz.

Por debajo de un rebajamiento de $1/10$, los efectos diferidos y accidentales de segundo orden (retracción, fluencia, temperatura, asientos, etc.) aumentan considerablemente, sobre todo en arcos empotrados y relativamente rígidos. Si el proyectista se mueve en el rango adecuado, dichos efectos no parecen que planteen problemas dignos de consideración.

En fin, el rebajamiento no puede aumentarse excesivamente, no sólo por el excesivo aumento de los empujes horizontales, sino porque se llegaría a un fenómeno de flexión excesiva, e incluso de pandeo ayudado por el acortamiento de la directriz, fenómeno que puede agravarse en los puentes de hormigón, por efecto de la deformación lenta. Fueron precisamente los movimientos de este género en un arco muy rebajado los que condujeron a Freyssinet a inventar su maniobra de apertura de clave (Torroja, 1996).

Por el contrario, al disminuir el rebajamiento más allá de $1/4$, el empuje va disminuyendo más lentamente que aquél y pierde interés el peraltado frente a los inconvenientes que lleva consigo (pandeo lateral, etc). Por ello, no se adoptan normalmente estos peraltes sin otras razones que induzcan a ello: forma del valle, aspecto estético, etc. (Torroja, 1996).

2.4.2. Empuje sobre los estribos.

Si la directriz del arco siguiese exactamente el funicular de las cargas, la resultante sobre el arranque del arco seguiría la tangente a la directriz; por tanto, en el arranque resulta más tendida y, al mismo tiempo, tanto mayor cuanto más rebajado sea el arco (Torroja, 1996). Por consiguiente, el valor del empuje en el arco queda acotado entre un mínimo correspondiente a la línea de presiones más peraltada y un máximo estable asociado a la más rebajada (Regalado, 1999).

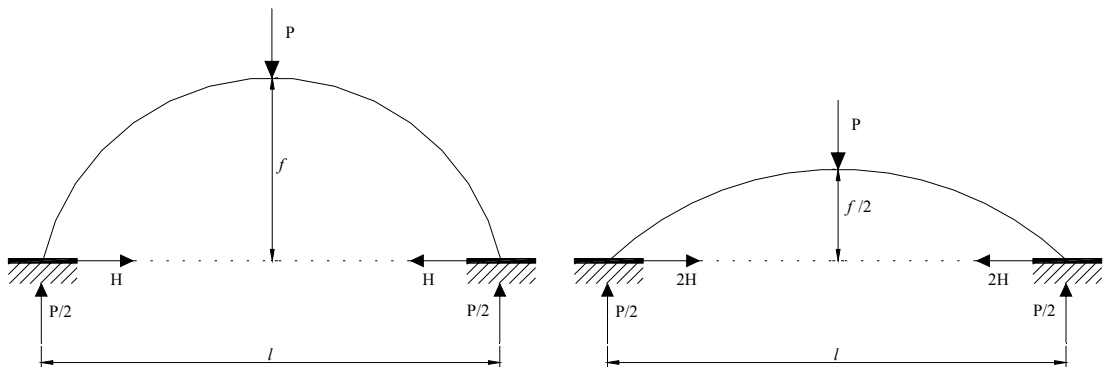


Figura 1.12. Variación del empuje de un arco en función de su flecha.

El empuje es proporcional a la carga y al cuadrado de la luz, e inversamente proporcional a la altura del arco. Para obtener el empuje mínimo con una determinada luz a cubrir, el arco debe ser lo más liviano posible y su altura, la mayor económicamente factible (Salvadori y Heller, 1998). Como aproximación rápida se puede obtener un orden de magnitud del empuje horizontal, como el valor de la carga vertical total del arco por el octavo del rebajamiento, o cociente de la luz por la ságita del arco (Torroja, 1996).

Por tanto, la existencia de empujes reduce los momentos flectores del arco con respecto a los que existirían en la viga de igual luz, creando en aquél un régimen predominante de compresiones, mucho más favorable que el de flexión simple típico de las vigas (García de Arangoá, 1971).

Estos empujes requieren una buena cimentación o unos buenos contrarrestos, que en el caso de arcos de cubierta implica el dimensionar y reforzar adecuadamente los soportes sobre los que arrancan los arcos, por los importantes esfuerzos que transmiten. Podría lograrse el mismo efecto atirantando el arco, pero el hecho de colocar un tirante a un arco conlleva una pérdida importante de la estética que acompaña a estas estructuras, aunque desde el punto de vista mecánico su utilización está plenamente justificada.

2.5. Tipología objeto de estudio.

En primer lugar, como se vislumbra en el título del trabajo, el acero va a ser el material elegido para diseñar los arcos. En edificación agroindustrial, para luces comprendidas entre 20 y 60 metros, el acero se presenta como el material más económico para resistir. En este tipo de edificación, aunque se quiera proyectar con formas atrevidas, la limitación presupuestaria será casi siempre un parámetro fundamental que reducirá las posibilidades de diseño a formas estructurales económicas.

Por ello se ha hecho poco hincapié en los efectos de la retracción y de las deformaciones lentas. Sin embargo, las tensiones térmicas son muy importantes, pues siguen con facilidad las variaciones de temperatura ambiente y aún las superan cuando actúa la radiación solar directamente sobre el metal (Torroja, 1996).

Se van a estudiar arcos biarticulados y biempotrados, con diversas relaciones entre flecha y luz, buscando siempre el aspecto estético en la estructura, por lo que se recomendarán rebajamientos del orden de $1/6$ ó $1/8$. Las directrices serán parabólicas de segundo grado y circulares, aunque se podrá constatar que en edificación agroindustrial no existen razones de peso para complicar innecesariamente la ejecución material del arco de acero con curvas de radio variable, por lo que la directriz circular será una recomendación clara a la hora de realizar el diseño de los arcos.

García Badell (1999) establece en $1/7$ el valor frontera que separa los arcos rebajados $\left(\frac{f}{l} < \frac{1}{7}\right)$ y los arcos peraltados $\left(\frac{f}{l} > \frac{1}{7}\right)$, por lo que tiene interés estudiar un rebajamiento inferior ($1/8$) y uno superior ($1/6$) para comprobar la contribución de la deformación debida al esfuerzo axial, sin soslayar la eficacia y la estética del arco. En cambio, García de Arangoá (1971) determina el valor $1/10$ como límite entre arcos rebajados y arcos peraltados. Según su criterio, tanto los rebajamientos $1/6$ como $1/8$ estarían dentro del grupo de arcos peraltados.

3. Bases de cálculo.

Para el cálculo de los diferentes tipos de arcos se admite la hipótesis de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, es decir, la ley de Hooke. Asimismo, se supondrá que las deformaciones no alteran las líneas de acción de las fuerzas que componen la sollicitación exterior, por lo que se calcula el estado tensional considerando el arco como indeformable, y se admite la validez del

principio de superposición, que determina que el efecto de un grupo de causas es igual a la suma por separado de las diferentes causas (Oliver y Ortiz, 1970; Argüelles, 1996).

Se supone que su plano de curvatura es también un plano de simetría para cada una de las secciones transversales y que las fuerzas externas aplicadas al arco actúan solamente en aquel plano de simetría. En tales condiciones, la deformación tendrá lugar en ese plano y el problema de análisis será bidimensional.

Si la sección transversal del arco no es simétrica con respecto al plano de curvatura, o si las cargas se aplican normalmente a este plano, se producirá torsión y entonces la barra no se puede considerar propiamente como un arco. (Dávila y Pajón, 1997). En todo lo que sigue no se tendrán en cuenta las condiciones que conducen a la torsión.

Referidas estas bases de cálculo, la hipótesis fundamental para el estudio de los arcos es que su curvatura es pequeña en comparación con las dimensiones transversales de su sección, o lo que es lo mismo, que el radio de curvatura es mucho mayor que el canto de la sección. Esta simplificación es aplicable normalmente si la relación entre el radio de curvatura y el canto es superior a 10 (Argüelles, 1986; Celigüeta, 1998).

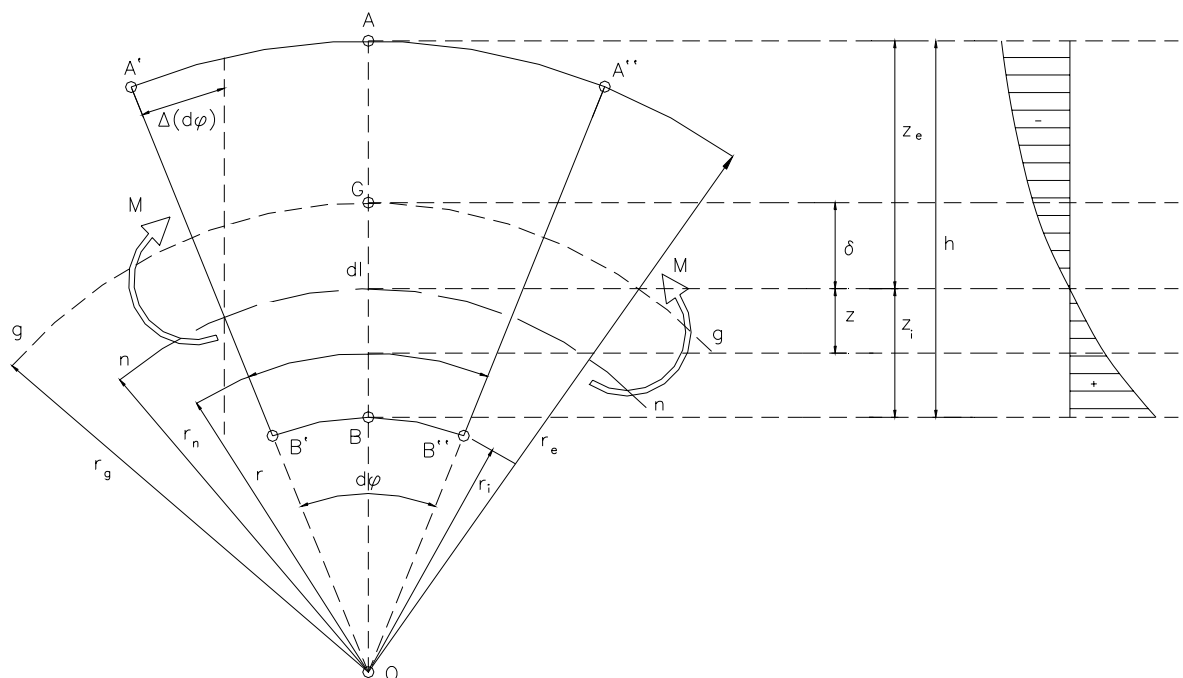


Figura 1.13. Distribución de tensiones en una pieza prismática de directriz curva.

En vigas, piezas prismáticas de directriz recta, las tensiones que produce un momento flector M_y vienen dadas por la ecuación:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad [1.1]$$

que representa un reparto lineal de la tensión a lo largo de la sección transversal. En piezas prismáticas de directriz curva, bajo la acción del momento M , la tensión σ_x , calculada bajo la hipótesis de Bernoulli (que dicta que la sección transversal permanece plana después de la deformación), no se reparte linealmente sino hiperbólicamente (figura 1.13), y la fibra neutra no se sitúa en el centro de gravedad G de la sección sino a una distancia δ de él.

En una pieza de directriz curva sometida a flexión pura por la acción de un momento M positivo, se puede comprobar cómo el valor de la tensión normal difiere entre la cara convexa y la cara cóncava, siendo en esta última mayor al ser menor su radio de curvatura que el de la cara convexa. De este modo, el eje neutro $n-n$ deja de coincidir con la fibra media $g-g$ que une los centros de gravedad de las diversas secciones transversales, y se desplaza hacia la cara cóncava una distancia δ igual a:

$$\delta = r_g - r_n$$

siendo r_g el radio de la fibra media y r_n el radio de la fibra neutra.

La tensión σ_x se puede expresar, para una fibra genérica distante z de la fibra neutra, como

$$\sigma_x = \frac{M}{A \cdot \delta} \cdot \frac{z}{r} \quad [1.2]$$

siendo A el área de la sección y r el radio de la fibra considerada.

Si la sección es rectangular, $\delta = \frac{h}{12 \cdot r_g}$, por lo que cuando la relación

entre el radio de curvatura de la fibra media y el canto $\frac{r_g}{h}$ supera el valor de 10, como sucede claramente en los arcos, la diferencia entre la tensión σ_x obtenida por las expresiones [1.1] y [1.2] es insignificante. De hecho, para una relación $\frac{r_g}{h} = 10$, el error es del 3.2 por mil, y tiende hacia cero rápidamente

cuando aumenta la razón $\frac{r_g}{h}$ (Argüelles, 1986).

La suposición de pequeña curvatura hace que no sea necesario aplicar una teoría especial de piezas curvas, sino que es directamente aplicable la teoría convencional de flexión de vigas, considerando únicamente que el dominio de la estructura es curvo. Los primeros trabajos sobre arcos empleando estas hipótesis se deben a Navier (1826) y a Bresse (1854).

4. Métodos de cálculo.

De las múltiples formas en que un ingeniero puede abordar el problema del cálculo de los arcos, tres serán las que se desarrollen para comprobar las expresiones y los resultados obtenidos.

La exposición se va a iniciar con el método de los desplazamientos, que resuelve la cuestión con una perspectiva pedagógica, al seguir en el análisis de las deformaciones el desarrollo del fenómeno físico correspondiente.

En segundo lugar se van a estudiar las expresiones obtenidas a partir de métodos que se pueden englobar bajo el nombre de «energéticos». Estos métodos hacen intervenir una entidad física como el trabajo elástico, la energía de deformación o la energía potencial total, etc, prescindiendo de las expresiones de las deformaciones elementales que remiten directamente a las fórmulas fundamentales de la flexión, la compresión y la cortadura.

Por último se va a desarrollar la resolución de arcos por el método de los elementos finitos, herramienta potente que en la actualidad va reemplazando a los sistemas anteriores en el cálculo de todo tipo de estructuras.

Existen otros métodos de cálculo que no van a ser desarrollados por estar en desuso en nuestros días, aunque fueron utilizados con profusión en la primera mitad del siglo pasado. Entre ellos cabe citar el método de la analogía de la columna de Hardy Cross y el método de la elipse central de inercia.

4.1. Método de los desplazamientos.

Este método tiene su origen en la aplicación de las fórmulas de Bresse, que permiten calcular los corrimientos de los puntos de la directriz del arco, así como los giros experimentados por cualquier sección recta del prisma mecánico.

Si se analiza el problema estructural del arco desde el punto de vista de los desplazamientos y de las deformaciones, se manifiesta que al actuar las

solicitaciones tienden a desplazar a la estructura en bloque, a lo que se oponen las reacciones de sustentación, que logran el equilibrio del sistema.

El equilibrio entre acciones y reacciones se logra a través de la estructura, la cual canaliza los esfuerzos y queda en tensión, produciéndose deformaciones, que en último término representan la única realidad patente y sensible (Fernández Casado, 1955).

Las reacciones se calculan a partir de la teoría de las deformaciones, expresando analíticamente las condiciones en que han surgido.

Para desarrollar el método de las deformaciones se recurre a la superposición de dos estados de carga. El primero corresponde a una estructura isostática virtual obtenida a partir del arco hiperestático original. El segundo estado de carga completa la estructura isostática con las reacciones hiperestáticas propias del arco inicial.

Dos problemas aparecen a la hora de estudiar un arco hiperestático. El primero es la transformación de la estructura en otra isostática que sirva de punto de partida. El segundo se refiere al modo de calcular las deformaciones de la estructura auxiliar.

Para lograr el isostatismo se puede reducir el arco a viga curva o a voladizo. Conseguir la viga curva a partir del arco hiperestático es sencillo, pues basta liberar un apoyo de las restricciones superabundantes: el empuje en los arcos biarticulados y el empuje y el momento de empotramiento en los arcos biempotrados. El arco en voladizo o pescante puede conseguirse por cuatro caminos^(*) (Fernández Casado, 1955):

- Liberando una de las extremidades (figura 1.14)

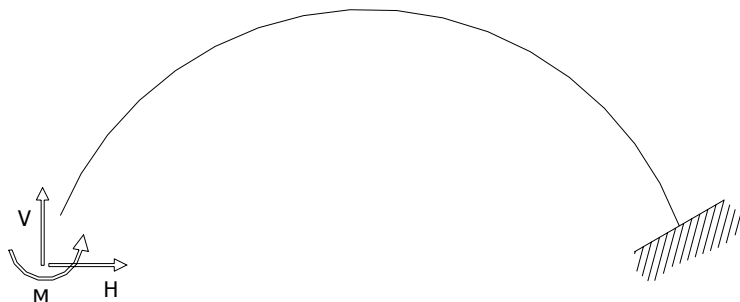


Figura 1.14. Arco en voladizo obtenido al liberar un apoyo.

(*) Se expresan todas las modalidades posibles de conversión de la estructura hiperestática para hacer ver que el método es extensivo a todo tipo de arco hiperestático, y no sólo a los arcos biarticulados y biempotrados objeto de estudio.

- Complementando la transformación anterior mediante la prolongación del arco con una barra de rigidez infinita que termina en el centro elástico (figura 1.15)

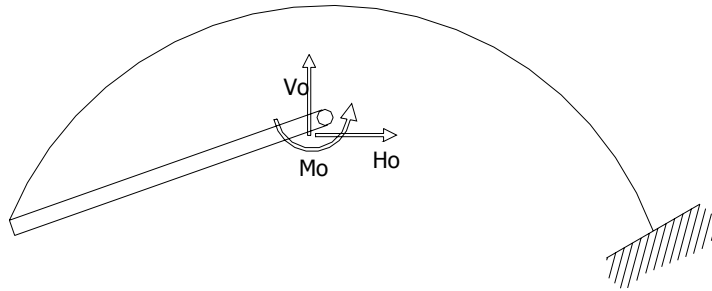


Figura 1.15. Arco en voladizo con extremo libre unido al centro elástico.

- Cortando el arco por la clave (en general por una sección cualquiera), con lo que se obtienen dos voladizos (figura 1.16).

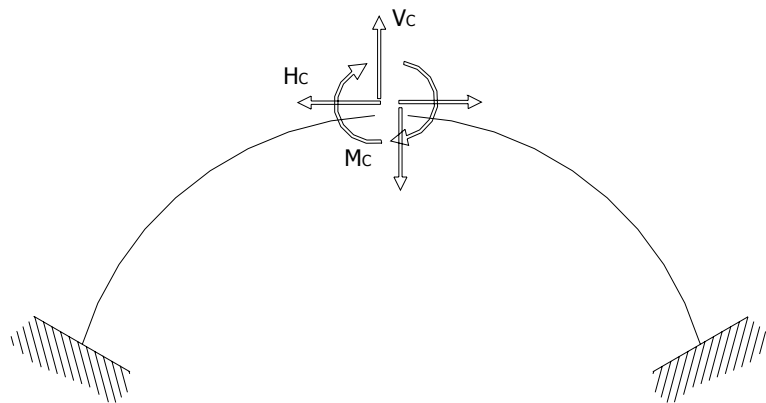


Figura 1.16. Arco biempotrado cortado por la clave.

- Si cada uno de estos voladizos se enlaza al centro elástico del arco por una barra de rigidez infinita obtenemos la última variante (figura 1.17).

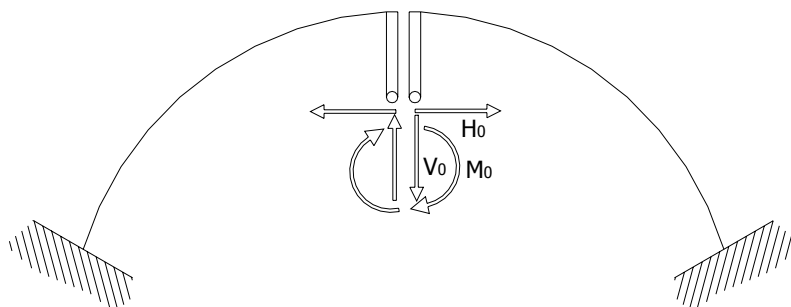


Figura 1.17. Variante para obtener arcos en voladizo a partir de un arco biempotrado.

Una vez que se tiene el arco isostático, se calculan las reacciones mediante las ecuaciones que proporciona la Estática. Después se somete a esta estructura virtual a la reacción de las acciones hiperestáticas que se encargan de anular las deformaciones incompatibles con las condiciones de sustentación.

En los arcos hiperestáticos las incógnitas son siempre más de tres, seis en el caso del arco biempotrado. Por consiguiente, se necesitan otras ecuaciones que expresen las condiciones de indeformabilidad debidas al sistema de sustentación.

- La primera de estas condiciones es la *invariabilidad de la luz* [1.3], que es suficiente en el caso del arco de dos articulaciones (sólo cuatro incógnitas).

$$\delta_B = 0 \quad [1.3]$$

- La segunda condición es la *ausencia de desnivelación entre apoyos* que, junto con la anterior, resuelve el problema del arco de una sola articulación, donde las incógnitas son cinco.

$$\begin{aligned} \delta_B &= 0 \\ \Delta_B &= 0 \end{aligned} \quad [1.4]$$

- La tercera condición es que *el giro relativo de las dos secciones extremas es nulo*, y con ella se obtienen las tres ecuaciones complementarias [1.5] para resolver el problema general del arco empotrado.

$$\begin{aligned} \delta_B &= 0 \\ \Delta_B &= 0 \\ \theta_B &= 0 \end{aligned} \quad [1.5]$$

Como ya se ha indicado, tras conocer las estructuras isostáticas que sirven de partida para el análisis del arco hiperestático, el segundo problema básico para el estudio de un arco es el cálculo de las deformaciones, y concretando más, de las deformaciones de una extremidad con respecto a la otra.

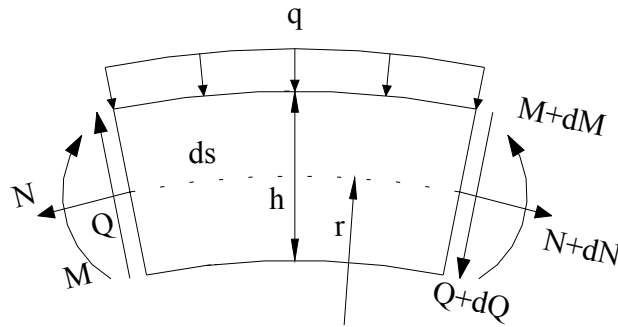


Figura 1.18. Esfuerzos en una rebanada de arco bajo carga.

La continuidad geométrica del arco permite el análisis diferencial de una rebanada aislada (figura 1.18), en cuyas secciones transversales infinitamente próximas se producen los esfuerzos M , N y Q . Si se estudia por separado la deformación que produce cada fuerza de sección, se tiene que el momento flector M produce un giro de la sección, el esfuerzo normal N ocasiona una translación o desplazamiento longitudinal y el esfuerzo cortante Q un corrimiento o desplazamiento transversal de la sección.

La acción conjunta de estas deformaciones elementales, al superponerse, permite obtener la deformación de un punto cualquiera de la directriz, que será una etapa intermedia para conocer las deformaciones relativas de un extremo del arco con respecto al otro, definidas por las expresiones [1.6], que se determinarán en el Capítulo 2.

$$\begin{aligned}\delta &= \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx + \int_0^l \alpha \cdot \frac{Q}{G \cdot A} \cdot dz + \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds \\ \Delta &= \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dz - \int_0^l \alpha \cdot \frac{Q}{G \cdot A} \cdot dx - \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds \\ \theta &= \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds\end{aligned}\quad [1.6]$$

En estas ecuaciones, E es el módulo de elasticidad del material, G el módulo de elasticidad transversal del material, A el área de la sección transversal, I el momento de inercia de la sección transversal y α el factor de forma de la sección transversal.

Con posterioridad se calcularán los esfuerzos en cualquier punto de la directriz, y por último se determinarán las reacciones de las estructuras hiperestáticas estudiadas.

4.2. Métodos energéticos.

Esta denominación recoge una serie de modos de calcular arcos estáticamente indeterminados mediante la aplicación de teoremas muy utilizados en el cálculo de estructuras, y que tienen como punto de partida el empleo de entidades no tangibles, tales como la energía de deformación o el trabajo elástico. Así, entre los principios o teoremas referidos se puede citar el segundo teorema de Castigliano, el teorema del mínimo trabajo, -en ellos se apoyan Timoshenko y Young (1981), y García de Arangoá (1971)-, el principio de los trabajos virtuales, o el teorema de Maxwell-Betti o de la reciprocidad de los recorridos, en los que basan su formulación Leontovich (1971) o Celigüeta (1998).

Si se analiza un elemento diferencial de arco, en el que se designa por M , N y Q los esfuerzos de cualquier sección transversal, con los sentidos positivos que se indican en la figura 1.18, por ser el canto h de la sección transversal pequeño respecto al radio de curvatura r de la directriz del arco, se puede emplear para determinar la energía de deformación por flexión U_f la expresión:

$$U_f = \int_0^s \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot I}$$

Esta expresión es semejante a la que se emplea en vigas rectas, con la aparición de la variable s , que representa la longitud de la directriz del arco.

Del mismo modo se puede determinar la energía de deformación por cortante U_c mediante la expresión:

$$U_c = \int_0^s \alpha \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A}$$

Al ser los arcos esbeltos, esta magnitud es pequeña comparada con la debida a la flexión, por lo que es común despreciarla (Timoshenko y Young, 1981; Celigüeta, 1998).

Finalmente, para la energía de deformación por compresión directa U_t , se tiene:

$$U_t = \int_0^s \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot A}$$

Así, la energía de deformación total del arco queda definida por:

$$U = \int_0^s \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot I} + \int_0^s \alpha \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A} + \int_0^s \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot A} \quad [1.7]$$

Si además se tiene en cuenta los efectos de la temperatura, esta expresión se completa de la forma (García de Arangoá, 1971):

$$U = \int_0^s \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot I} + \int_0^s \alpha \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot A} + \int_0^s \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot A} + \int_0^s N \cdot \alpha_t \cdot t \cdot ds + \int_0^s M \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds \quad [1.8]$$

donde α_t es el coeficiente de dilatación térmica, Δt es el incremento de temperatura respecto a una situación de referencia y $\frac{\Delta t}{h}$ representa el gradiente de temperatura entre trasdós e intradós.

Partiendo de esta expresión y aplicando convenientemente los teoremas adecuados se determinarán los esfuerzos en cualquier sección, así como las reacciones buscadas.

4.3. Método de los elementos finitos.

Este método determina el comportamiento de una estructura sometida a acciones exteriores, sustituyendo la solución continua y exacta de las ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico por una solución discontinua o discreta, y por tanto, aproximada.

Salvo las estructuras reticulares, la mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua y, por tanto, su comportamiento no puede expresarse en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas. Por ello, la exactitud de los resultados sólo podrá alcanzarse en estructuras de barras.

Aunque las estructuras continuas son tridimensionales, en algunos casos su comportamiento se puede describir adecuadamente con modelos matemáticos uni o bidimensionales, siempre que se pueda hacer uso de hipótesis simplificativas.

Para analizar un arco por el método de los elementos finitos a partir de su geometría, apoyos y cargas que actúan, es necesario establecer en primer lugar un modelo matemático apropiado para describir su comportamiento. En este trabajo dos son los modelos matemáticos que se van a utilizar: el modelo

que se basa en la teoría de la flexión de vigas de Timoshenko (Capítulo 4) y el que se funda en la teoría clásica de Euler-Bernoulli (Capítulo 5).

Es común en el método de los elementos finitos denominar con un nombre específico al elemento base de la discretización. Así, en cualquier publicación del método son frecuentes las referencias a elementos de barra, de viga, de placa, de lámina, etc, y dentro de esta denominación genérica se particulariza en función del modelo matemático empleado. Por ejemplo, se habla de elementos de viga de Timoshenko y elementos de viga de Euler-Bernoulli, según se haya utilizado un modelo u otro.

En esta fase de la aplicación del método es necesario determinar con detalle las características del material de la estructura, aspecto sencillo en esta obra al limitarse únicamente a arcos de acero.

En segundo lugar se procede a discretizar la estructura en porciones que no intersecten entre sí, que se denominan «elementos finitos». Dependiendo del tipo de problema, el elemento finito será uni, bi o tridimensional, y estará constituido por un número discreto de «nodos». En general, la malla de elementos finitos puede estar constituida por elementos de diferente geometría.

Una vez comentada la norma general de nombrar un elemento en función del tipo de problema y del tipo de modelo matemático empleado, la forma de discretizar un arco también puede ser influyente a la hora de denominar el elemento en cuestión. Así, si se decide discretizar el arco plano estudiado en elementos curvos, se acepta el nombre de elemento de viga curvado (Saleeb y Chang, 1987; Benedetti y Trally, 1989; Dorfi y Busby, 1994; Raveendranath y col, 1999) frente al más simple elemento de arco (Oñate, 1995, 2002).

Una manera más sencilla de discretizar un arco plano consiste en hacerlo mediante elementos rectos. De este modo, cuando el elemento finito es una barra recta sometida a cargas externas que provocan, en el caso más general, una situación conjunta de compresión y flexión (compresión compuesta o flexión compuesta, dependiendo del predominio de una u otra), la denominación es más compleja y también más confusa. Existe la tendencia de designar al elemento finito como elemento de Timoshenko o elemento de viga de Timoshenko, solicitado únicamente a flexión, acoplando el efecto de la compresión mediante un elemento de barra (Bathe, 1996; Hughes, 2000; Zienkiewicz y Taylor, 2000a). En este trabajo se ha optado por la denominación de elemento de pórtico plano. Únicamente en las referencias bibliográficas Arndt (2001), Baresi y col. (2003) y Kattan (2003) aparece este nombre, sin que en ellas se desarrolle la formulación que define el elemento en su totalidad.

El elemento de pórtico plano puede basarse en el modelo de Timoshenko (Capítulo 4) o en el de Euler-Bernoulli (Capítulo 5), obteniéndose formulaciones distintas que se desarrollan en los capítulos citados.

En tercer lugar, a partir de la expresión del principio de los trabajos virtuales (Oñate, 1995; Zienkiewicz y Taylor, 2000a) o el principio de la energía potencial total (Bathe, 1996; Hughes, 2000, Felippa, 2001a) se obtienen las matrices de rigidez y el vector de cargas para cada elemento finito (matrices y vectores locales, referidas al sistema de coordenadas asociado al elemento).

Posteriormente se procede al ensamblaje de las matrices de rigidez y el vector de cargas equivalentes de todos los elementos de la malla, obteniéndose las matrices globales, referidas al sistema de coordenadas general del arco. Así, se obtiene el sistema de ecuaciones del arco,

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad [1.9]$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez global del arco, $\{a\}$ el vector de desplazamientos de los nodos y $\{f\}$ el vector de cargas de la estructura.

Una vez establecida la ecuación matricial de gobierno de la estructura, se resuelve el sistema de ecuaciones. Una vez calculados los movimientos nodales $\{a\}$ se pueden calcular las deformaciones y, posteriormente, las tensiones en cada elemento así como las reacciones en los nodos con movimientos prescritos.

El enorme número de ecuaciones que genera el método sólo puede ser resuelto con métodos matriciales, haciendo uso de la potencia de cálculo de los ordenadores. Así, el desarrollo del método de los elementos finitos ha ido íntimamente unido al avance de la electrónica digital aplicada a los computadores.

5. Pandeo de arcos.

La mayor parte de la información disponible sobre el pandeo de arcos se refiere a aquéllos cuya directriz es el funicular de las cargas, es decir, que no sufren flexiones en ninguno de sus puntos anteriormente al pandeo. Por tanto, se está en un caso similar al del soporte comprimido (Escrig, 1985).

Como toda pieza comprimida, el arco sufre los peligros del pandeo, si bien al estar fijos los arranques, el arco tiende a tomar una configuración de pandeo más resistente que en el caso de un soporte, cuyos extremos pueden

aproximarse al producirse el pandeo. En consecuencia, la esbeltez admisible del arco puede ser mayor que la del soporte (Torroja, 1996).

El estudio del pandeo de arcos se complica respecto al de la barra recta, pues en ésta el esfuerzo longitudinal que da origen al pandeo es, en general, independiente de la sollicitación de flexión de la pieza, mientras que en el arco la compresión longitudinal deriva de la sollicitación principal y viene, por tanto, directamente afectada por los momentos flectores complementarios de deformación (Fernández Casado, 1955).

Son habituales los estudios de pandeo de arcos centrados en una tipología concreta, fundamentalmente referidos a modelos base de puentes. En la referencia Fernández Casado (1955) puede encontrarse el análisis del pandeo de arcos simétricos con carga antimétrica, con carga simétrica y diversos tipos de sustentaciones, siguiendo la metodología que introdujo Dischinger (1937) para el estudio de arcos parabólicos con inercia reducida constante.

Sin embargo, esta concreción en los análisis de pandeo carecen de la generalidad necesaria para hacerlos extensivos a todos los tipos de arcos y de cargas.

Si se considera un arco como un pórtico con un número infinito de cortos tramos (Salvadori y Heller, 1998), se está muy cerca del razonamiento empleado para discretizar el arco en elementos finitos rectos. De este modo, la utilización de métodos de cálculo de pandeo para cualquier sistema plano de barras es aplicable en arcos, sin restricciones debidas a la forma de la directriz, a las sustentaciones o al tipo de carga.

De entre los métodos lineales de cálculo, el método matricial es el que permite analizar el pandeo global del arco, obteniendo la matriz geométrica de la estructura y determinando los autovalores. Los autovectores asociados permiten calcular los desplazamientos nodales de los nodos libres del arco al iniciarse el pandeo, definiendo la forma modal de pandeo del arco.

Por último, aprovechando la potencia de cálculo de las aplicaciones informáticas basadas en el método de los elementos finitos, se va a realizar el cálculo no lineal del pandeo. La no linealidad puede ser debida a propiedades de los materiales o a problemas de geometría.

Generalmente en la resolución de problemas lineales se considera que las deformaciones y desplazamientos en la estructura estudiada son pequeños, tal y como se ha referido en las bases de cálculo. Físicamente significa que la geometría de los elementos no varía durante la actuación de las fuerzas

exteriores, y que las deformaciones pueden aproximarse de forma lineal y asimilarse a infinitésimos de primer orden (Zienkiewicz y Taylor, 2000b).

En la práctica, dichas hipótesis fallan algunas veces, aún cuando las deformaciones reales sean pequeñas y no se sobrepasen los límites elásticos de los materiales que ordinariamente constituyen las estructuras. Este problema clásico de inestabilidad se va abordar a través de la aplicación informática ANSYS, empleando el procedimiento iterativo de Newton-Raphson, descrito en Ralston (1970) y Pruneda (2003).

Capítulo 2

Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos.

1.	Estructuras isostáticas auxiliares	33
1.1.	La viga curva	34
1.2.	El arco en voladizo o pescante	36
2.	Cálculo de las deformaciones	38
3.	Cálculo de las reacciones	42
4.	Efecto de la temperatura	45
5.	Centro elástico. Método abreviado de Muller-Breslau	48
6.	Arcos hiperestáticos	52
6.1.	Arcos biempotrados	52
6.1.1	Caso de arco simétrico	55
6.2.	Arcos biarticulados	58

Capítulo 2

Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos

1. Estructuras isostáticas auxiliares.

Los tipos de arcos isostáticos más elementales son el pescante o el arco en ménsula (figura 2.1 a) y el arco apoyado en dilatación (figura 2.1 b) o viga en arco, que se corresponden con la viga en voladizo y la viga doblemente apoyada.

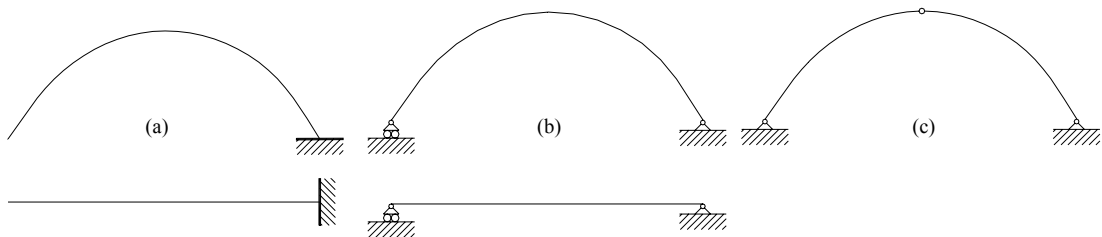


Figura 2.1. Estructuras isostáticas auxiliares.

Son ejemplos de poca aplicación en construcción, ya que al no intervenir los empujes su forma de trabajo se asemeja a la de las vigas, menos resistentes, a igualdad de sección, que un arco.

Argüelles (1996) presenta un ejemplo característico que muestra la reducción de sección de un arco biapoyado respecto a una viga curva isostática de igual geometría. Así, para cubrir un recinto dedicado a exposición de maquinaria de 29.4 m de luz y una flecha de 4.60 m, sometido a una carga uniforme de 480 kg/m (figura 2.2), se requiere un perfil IPN 240 si se decide emplear un arco parabólico, cuyo peso es de 36.2 kg/m. Si se hace deslizante el apoyo B, por lo que se convierte el arco biapoyado en un viga curva, se precisa una viga armada de un metro de canto, con un peso aproximado de 150 kg/m, más de cuatro veces superior al del arco.

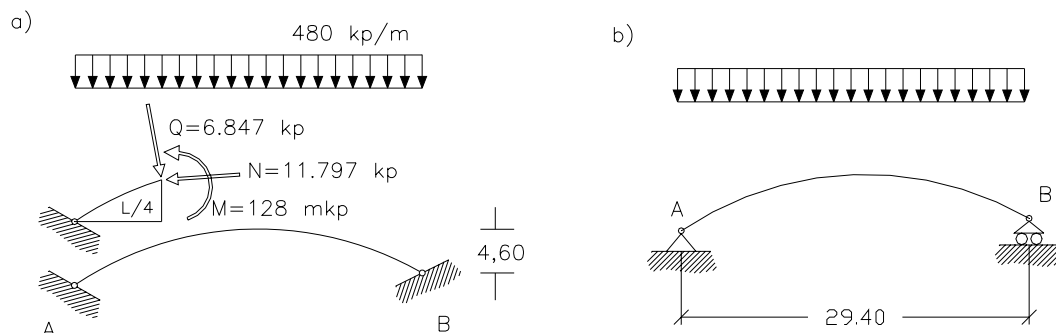


Figura 2.2. Comparación arco biapoyado – viga curva.

En efecto, la existencia de empujes en los apoyos reduce los momentos flectores del arco con respecto a los que existirían en la viga de igual luz, creando en el arco un régimen predominante de compresiones, mucho más favorable que el de flexión típico de vigas.

El arco sustentado sobre dos articulaciones se hace isostático quitándole una condición de enlace, es decir, introduciendo una articulación interior que generalmente se sitúa en la clave (figura 2.1 c). De los tres tipos que se muestran en la figura 2.1, el arco triarticulado representa la única tipología que tiene razón de ser constructiva, aunque su estudio no se realiza en esta obra.

1.1. La viga curva.

La primera estructura isostática auxiliar que se va a analizar es la viga curva isostáticamente sustentada. Se supone que los extremos están a diferente nivel, articulado el derecho y apoyado en dilatación el izquierdo. Sea l la luz salvada, h el desnivel y s la longitud del arco. Se toma como origen la extremidad izquierda, el eje x horizontal y el eje z vertical.

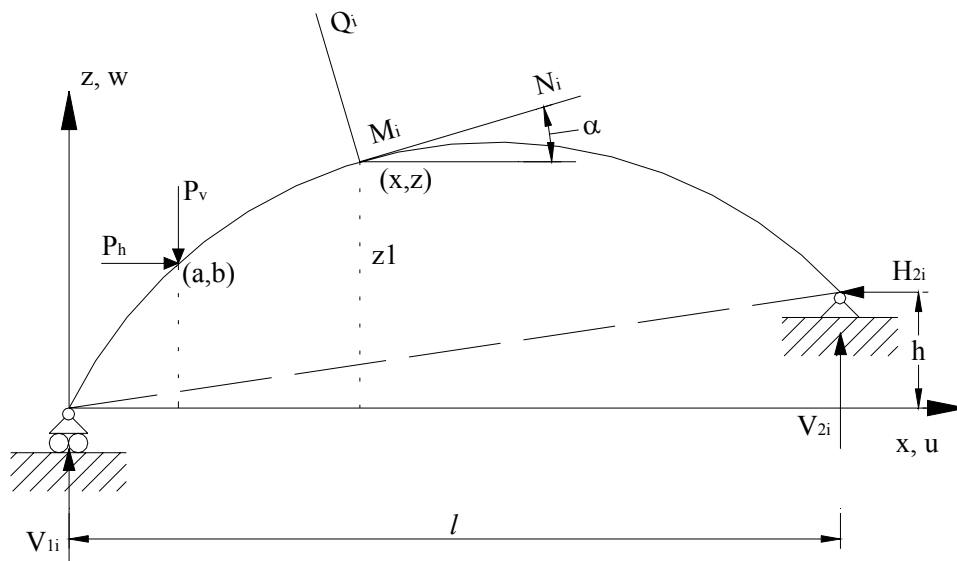


Figura 2.3. Viga en arco.

Sea $z=f(x)$ la ecuación de la directriz, (x, z) las coordenadas de una sección y (a, b) las coordenadas del punto de aplicación de una carga genérica P de componentes P_v y P_h . En el apoyo se desarrollará una reacción vertical $V_{1i}^{(*)}$, mientras que en la articulación la reacción R_{2i} constará de una componente

(*) El subíndice i se acompaña para hacer hincapié que el elemento en cuestión (reacción, fuerza de sección, etc) pertenece a una estructura isostática auxiliar, y como tal será utilizada en el futuro.

vertical V_{2i} y otra horizontal H_{2i} . Sus valores se deducen de las ecuaciones de la Estática.

$$\begin{aligned} V_{1i} + V_{2i} - \sum_0^s P_v &= 0 \\ H_{2i} - \sum_0^s P_h &= 0 \\ V_{1i} \cdot l - \sum_0^s P_v \cdot (l - a) - \sum_0^s P_h \cdot (h - b) &= 0 \end{aligned}$$

con lo que en la viga en arco se obtiene el valor de las reacciones:

$$\begin{aligned} V_{1i} &= \frac{1}{l} \cdot \left(\sum_0^s P_v \cdot (l - a) + \sum_0^s P_h \cdot (h - b) \right) \\ V_{2i} &= \sum_0^s P_v - V_{1i} \\ H_{2i} &= \sum_0^s P_h \end{aligned} \quad [2.1]$$

Las componentes M_i , N_i y Q_i del sistema de fuerzas a la izquierda de una sección (x, z) valen:

$$\begin{aligned} M_i &= V_{1i} \cdot x - \sum_0^x P_v \cdot (x - a) - \sum_0^x P_h \cdot (z - b) \\ N_i &= \text{sen} \alpha \cdot \left(V_{1i} - \sum_0^x P_v \right) + \cos \alpha \cdot \sum_0^x P_h \\ Q_i &= \cos \alpha \cdot \left(V_{1i} - \sum_0^x P_v \right) - \text{sen} \alpha \cdot \sum_0^x P_h = \frac{\partial M}{\partial s} \end{aligned} \quad [2.2]$$

Esta última se puede deducir de la primera derivando aquélla respecto de s como función compuesta, teniendo en cuenta que (figuras 2.3 y 2.10):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \alpha \\ \frac{dz}{ds} &= \text{sen} \alpha \end{aligned} \quad [2.3]$$

Conocidas M_i , N_i y Q_i para una sección cualquiera, y dado que el radio de curvatura es muy superior al canto de la sección transversal, pueden determinarse las tensiones normal σ y cortante τ mediante las expresiones:

$$\sigma = \frac{N_i}{A} + \frac{M_i}{I} \cdot z$$

$$\tau = \frac{Q_i}{I \cdot b} \cdot \iint_A z \cdot dA$$
[2.4]

donde A , I , b representan la sección transversal, el momento de inercia y la anchura de la sección recta considerada, y z la distancia de la fibra considerada al eje neutro de la sección.

En el caso de que sólo existan cargas verticales, P_h se anula, al igual que la componente horizontal del empuje H_{2i} . Las reacciones V_{1i} y V_{2i} son iguales a las de la viga apoyada proyección con las mismas cargas. En este caso, los momentos flectores de la viga en arco son iguales a los momentos que aparecen en los puntos correlativos de la viga proyección (figura 2.4), mientras que los esfuerzos cortantes en la pieza en arco disminuyen en relación a los de la viga proyección, a costa de la aparición de esfuerzos normales, en general de poca importancia.

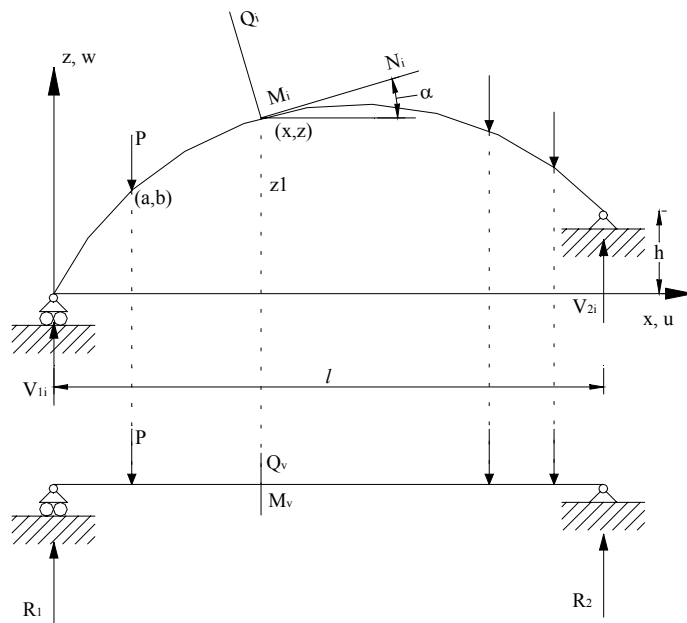


Figura 2.4. Viga en arco y su proyección.

1.2. El arco en voladizo o pescante.

De manera análoga a como se ha desarrollado la tipología isostática anterior, considérese un arco en voladizo de luz l , desnivel h entre el extremo libre y el empotramiento, y de longitud s .

El empotramiento se sitúa en la extremidad derecha, se toma como origen de coordenadas el extremo izquierdo y los ejes x y z representan los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

La ecuación de la directriz referida a estos ejes es $z=f(x)$. Se denomina (x, z) a las coordenadas de una sección cualquiera y (a, b) a las coordenadas que determinan la posición de una carga genérica P de componentes P_v y P_h . La reacción del empotramiento constará de dos componentes de fuerza $V_{2i}^{(*)}$ y H_{2i} , y del momento de empotramiento M_{2i} , cuyos valores se deducen de las ecuaciones de la Estática.

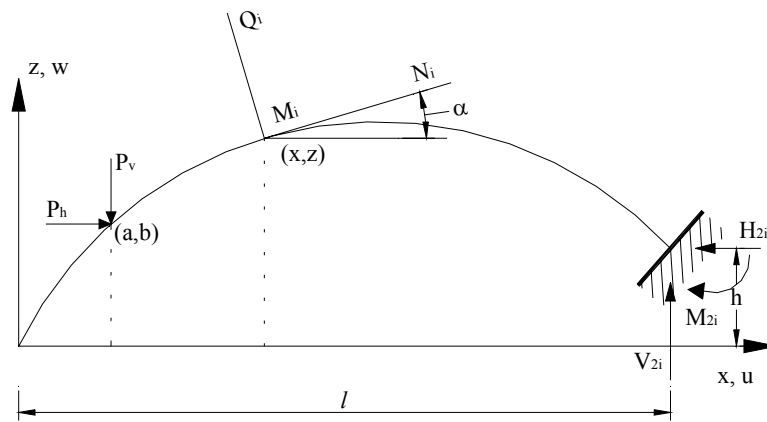


Figura 2.5. Arco en voladizo o pescante.

$$\begin{aligned}
 V_{2i} - \sum_0^s P_v &= 0 \\
 H_{2i} - \sum_0^s P_h &= 0 \\
 M_{2i} - \sum_0^s P_v \cdot (l - a) + \sum_0^s P_h \cdot (h - b) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Las componentes M_i , N_i y Q_i del sistema de fuerzas a la izquierda de una sección (x, z) valen:

$$\begin{aligned}
 M_i &= -\sum_0^x P_v \cdot (x - a) - \sum_0^x P_h \cdot (z - b) = 0 \\
 N_i &= -\text{sen} \alpha \cdot \sum_0^x P_v + \cos \alpha \cdot \sum_0^x P_h \\
 Q_i &= -\cos \alpha \cdot \sum_0^x P_v + \text{sen} \alpha \cdot \sum_0^x P_h = \frac{\partial M}{\partial s}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

(*) Al igual que en la viga curva apoyada en dilatación, el subíndice i se acompaña para hacer referencia que pertenece a una estructura isostática auxiliar.

Tal y como sucedía en la viga en arco, conocidas M_i , N_i y Q_i para una sección cualquiera, se pueden determinar las tensiones normal σ y cortante τ mediante las expresiones [2.4].

En el caso de que sólo existan cargas verticales, P_h se anula, al igual que la componente horizontal del empuje H_{2i} . Tanto los momentos flectores como la reacción vertical del arco en voladizo son iguales a los momentos que aparecen en las secciones correlativas de la viga proyección bajo el mismo sistema de cargas (figura 2.6).

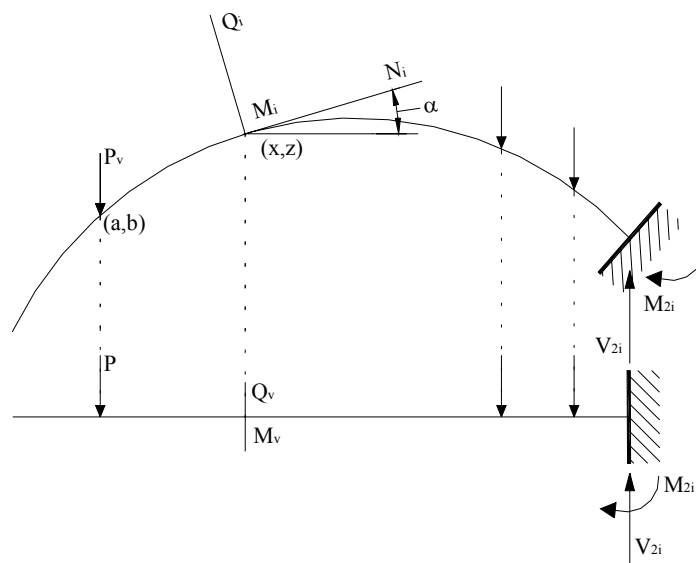


Figura 2.6. Arco en voladizo y su proyección.

2. Cálculo de las deformaciones.

En el estudio de las estructuras isostáticas auxiliares es necesario profundizar en el conocimiento de las deformaciones que se producen, sobre todo en relación a las de una extremidad respecto a la otra.

Aunque el estudio de las deformaciones es ya interesante de por sí para la obtención de las flechas, su importancia se acrecienta porque facilita la comprensión y cálculo de los arcos hiperestáticos, pues la posición de la directriz tras la deformación quedará determinada por la variación de sus coordenadas y el cambio de orientación de la sección.

Teniendo en cuenta la continuidad de la estructura, se van a estudiar las deformaciones en un elemento de directriz ds entre dos secciones infinitamente próximas, descomponiendo el movimiento relativo de ambas secciones en giro debido al par flector, desplazamiento paralelo (sin giro) por el esfuerzo de

compresión y corrimiento transversal (también sin giro) por el esfuerzo de cortadura.

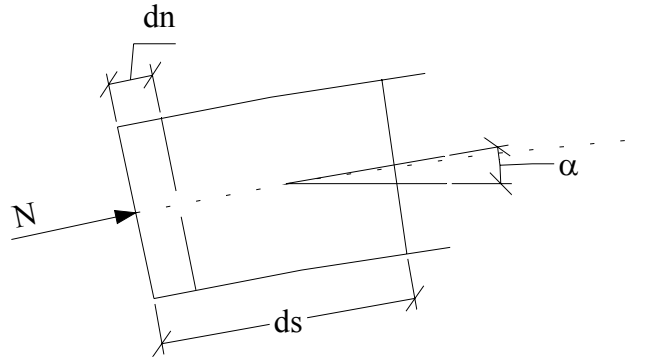


Figura 2.7. Deformación que provoca N .

El esfuerzo longitudinal produce una translación paralela de la sección respecto a la infinitamente próxima (figura 2.7) que viene definida por la ecuación fundamental de la compresión [2.7]. Las componentes de este desplazamiento se obtienen proyectando sobre los ejes (figura 2.10), y se recogen en las expresiones [2.10].

$$dn = \frac{N}{E \cdot A} \cdot ds \quad [2.7]$$

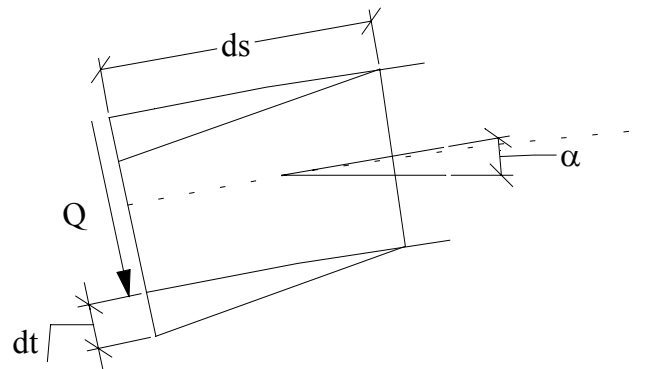


Figura 2.8. Deformación que provoca Q .

El esfuerzo cortante produce corrimiento vertical de la sección respecto a la infinitamente próxima (figura 2.8) que viene definida por la ecuación fundamental de la cortadura [2.8]. Las componentes de este desplazamiento también se obtienen proyectando sobre los ejes x, z .

$$dt = \frac{\chi \cdot Q}{G \cdot A} \cdot ds \quad [2.8]$$

donde χ es el coeficiente de forma de la sección.

El momento flector produce un giro de la sección con respecto a la infinitamente próxima (figura 2.9), que se obtiene mediante la ecuación fundamental de la flexión de piezas rectas [2.9], aplicable al caso de piezas curvas en la hipótesis de gran radio de curvatura.

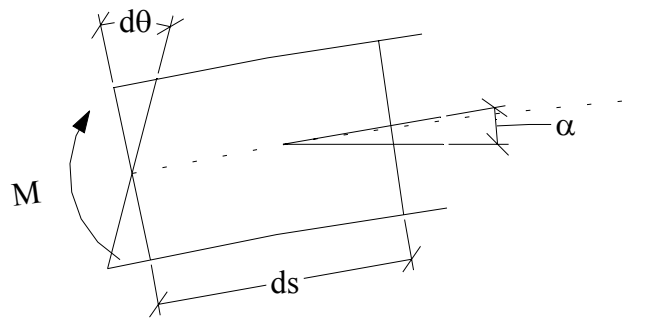


Figura 2.9. Deformación que provoca un momento flector M .

$$d\theta = \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds \quad [2.9]$$

Las componentes de las deformaciones según los ejes x , z se puede determinar analizando la figura 2.10.

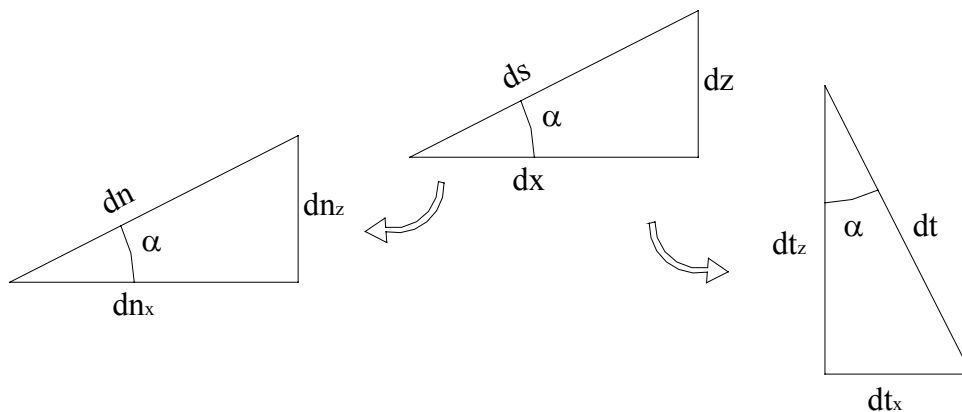


Figura 2.10. Deformaciones según los ejes x , z .

Por semejanza de triángulos se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{ds} &= \frac{dn_x}{dx} = \frac{dn_z}{dz} \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{dt_x}{dz} = \frac{dt_z}{dx} \end{aligned}$$

Por tanto, respecto a un sistema de coordenadas cuyo origen se sitúa en el extremo izquierdo del arco y con los sentidos positivos que aparecen en la figura 2.5, se tiene:

$$\begin{aligned} dn_x + dt_x &= \frac{N}{A \cdot E} \cdot dx + \frac{\chi \cdot Q}{A \cdot G} \cdot dz \\ dn_z - dt_z &= \frac{N}{A \cdot E} \cdot dz - \frac{\chi \cdot Q}{A \cdot G} \cdot dx \end{aligned} \quad [2.10]$$

En cuanto al giro, además del propio giro se provoca un desplazamiento horizontal y otro vertical, como indica la figura 2.11.

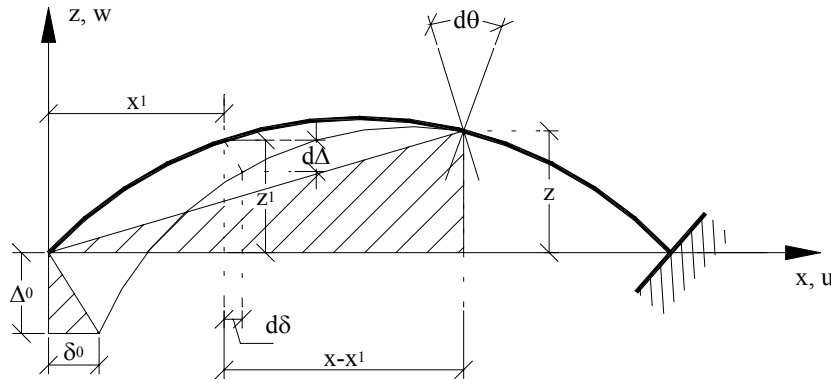


Figura 2.11. Deformaciones provocadas por un giro $d\theta$.

En una sección genérica, de coordenadas (x, z) , se tiene:

$$\frac{x}{d\Delta} = \frac{z}{d\delta} = \frac{1}{d\theta} \rightarrow \begin{aligned} d\delta &= z \cdot d\theta \\ d\Delta &= x \cdot d\theta \end{aligned} \quad [2.11]$$

al ser los triángulos rayados semejantes. Según la definición de $d\theta$, dada por [2.9], se puede escribir:

$$\begin{aligned} d\Delta &= \frac{M}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds \\ d\delta &= \frac{M}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds \end{aligned} \quad [2.12]$$

Tal y como se muestra en la figura 2.11, denominando $d\delta$ al desplazamiento horizontal, $d\Delta$ al desplazamiento vertical y $d\theta$ al giro, y teniendo en cuenta las expresiones [2.7] a [2.12], las deformaciones en una sección intermedia (x_1, z_1) se obtienen al integrar desde el punto considerado hasta la extremidad derecha. Así:

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_{x_1}^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds \\
\Delta &= -\int_{x_1}^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot (x - x_1) \cdot ds + \int_{z_1}^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dz - \int_{x_1}^l \frac{\chi \cdot Q}{G \cdot A} \cdot dx \\
\delta &= \int_{x_1}^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot (z - z_1) \cdot ds + \int_{x_1}^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx + \int_{z_1}^l \frac{\chi \cdot Q}{G \cdot A} \cdot dz
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Para obtener las deformaciones angulares y lineales en la extremidad izquierda basta integrar a todo lo largo de la directriz, obteniéndose el sistema [2.14]:

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds \\
\Delta &= -\int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds + \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dz - \int_0^l \frac{\chi \cdot Q}{G \cdot A} \cdot dx \\
\delta &= \int_0^l \frac{M}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds + \int_0^l \frac{N}{E \cdot A} \cdot dx + \int_0^l \frac{\chi \cdot Q}{G \cdot A} \cdot dz
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Estas expresiones proporcionan las deformaciones relativas de una extremidad con respecto a la otra, aún en la hipótesis de que no permanezca fijo el extremo derecho del arco.

3. Cálculo de las reacciones.

Ya se dispone del sistema de ecuaciones que, junto con el que se obtenga por aplicación directa de la Estática tanto en arcos biarticulados como en arcos biempotrados, permite la resolución de estas estructuras hiperestáticas.

El problema es que en las expresiones recogidas en [2.14] no figuran explícitamente las reacciones hiperestáticas, sino que están englobadas en los términos M , N y Q . Estas fuerzas de sección pueden expresarse en función de las reacciones de sustentación de la extremidad izquierda H_1 , V_1 y M_1 y de unos términos dependientes de la carga. Las reacciones son las incógnitas superabundantes en la estructura hiperestática de tercer grado, el arco biempotrado.

Para facilitar las expresiones en lo posible, se van a obtener los valores de M_i , N_i y Q_i del sistema de fuerzas a la izquierda de una sección (x, z) en un arco en ménsula con arranques a nivel (figura 2.12):

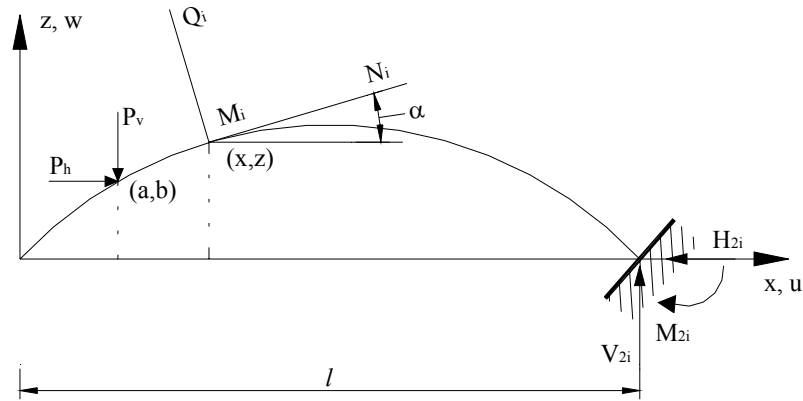
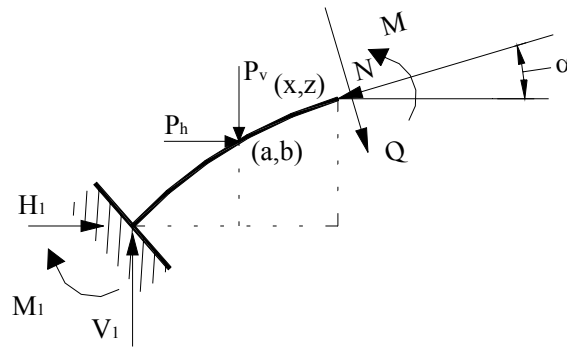


Figura 2.12. Arco en ménsula con arranques a nivel.

$$\begin{aligned}
 M_i &= -\sum_0^x P_v \cdot (x - a) - \sum_0^x P_h \cdot (z - b) \\
 N_i &= -\sum_0^x P_v \cdot \sen \alpha + \sum_0^x P_h \cdot \cos \alpha \\
 Q_i &= -\sum_0^x P_v \cdot \cos \alpha - \sum_0^x P_h \cdot \sen \alpha
 \end{aligned}
 \quad [2.15]$$

Figura 2.13. Obtención de M , N y Q en un arco biempotrado.

Ahora, para el arco doblemente empotrado los valores de M , N y Q son (figura 2.13):

$$\begin{aligned}
 M &= V_1 \cdot x - H_1 \cdot z - \sum_0^x P_h \cdot (z - b) - \sum_0^x P_v \cdot (x - a) + M_1 \\
 N &= \left(V_1 - \sum_0^x P_v \right) \cdot \sen \alpha + \left(H_1 + \sum_0^x P_h \right) \cdot \cos \alpha \\
 Q &= \left(V_1 - \sum_0^x P_v \right) \cdot \cos \alpha - \left(H_1 + \sum_0^x P_h \right) \cdot \sen \alpha
 \end{aligned}$$

Si se expresan en función de M_i , N_i y Q_i , se tiene:

$$\begin{aligned}
M &= M_i + V_1 \cdot x - H_1 \cdot z + M_1 \\
N &= N_i + V_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha + H_1 \cdot \cos \alpha \\
Q &= Q_i + V_1 \cdot \cos \alpha - H_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}
\quad [2.16]$$

Sustituyendo los valores del sistema [2.16] en [2.14], y recuperando las relaciones recogidas en [2.3], se obtienen las expresiones [2.17], que representan un sistema de ecuaciones mucho más significativo al aparecer explícitamente los términos que dependen de las reacciones y los debidos a las cargas.

$$\begin{aligned}
E \cdot \theta &= M_1 \cdot \int \frac{1}{I} \cdot ds + V_1 \cdot \int \frac{x}{I} \cdot ds - H_1 \cdot \int \frac{z}{I} \cdot ds + \int \frac{M_i}{I} \cdot ds \\
E \cdot \Delta &= -M_1 \cdot \int \frac{x}{I} \cdot ds + V_1 \cdot \left[-\int \frac{x^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \cos^2 \alpha}{A} \cdot ds \right] + \\
&\quad + H_1 \cdot \left[\int \frac{x \cdot z}{I} \cdot ds + \int \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{A} \cdot ds + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{A} \cdot ds \right] + \\
&\quad - \int \frac{M_i \cdot x}{I} \cdot ds + \int \frac{N_i}{A} \cdot dz - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dx \\
E \cdot \delta &= M_1 \cdot \int \frac{z}{I} \cdot ds + V_1 \cdot \left[-\int \frac{x \cdot z}{I} \cdot ds + \int \frac{\operatorname{sen} \alpha}{A} \cdot ds + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}{A} \cdot ds \right] + \\
&\quad + H_1 \cdot \left[-\int \frac{z^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\cos^2 \alpha}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{A} \cdot ds \right] + \\
&\quad + \int \frac{M_i \cdot z}{I} \cdot ds + \int \frac{N_i}{A} \cdot dx + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dz
\end{aligned}
\quad [2.17]$$

Tabla 2.1. Coeficientes de carga.	
$\int \frac{M_i}{I} \cdot ds$	$\int \frac{M_i \cdot x}{I} \cdot ds$
$\int \frac{M_i \cdot z}{I} \cdot ds$	$\int \frac{N_i}{A} \cdot dz$
$\int \frac{N_i}{A} \cdot dx$	$\int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dx$
$\int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dz$	

Los términos dependientes de las cargas son siete integrales diferentes, y bajo el signo integral, además de funciones algebraicas y circulares, aparecen

los esfuerzos isostáticos. Estas integrales valen exclusivamente para una hipótesis determinada de carga, por lo que a estos coeficientes, recogidos en la tabla 2.1, se les denomina coeficientes de carga.

Las integrales reunidas en tabla 2.2 se denominan coeficientes fijos y se calculan una vez para cada arco.

Tabla 2.2. Coeficientes fijos.	
$\int \frac{1}{I} \cdot ds$	$\int \frac{x}{I} \cdot ds$
$\int \frac{z}{I} \cdot ds$	$\int \frac{x^2}{I} \cdot ds$
$\int \frac{z^2}{I} \cdot ds$	$\int \frac{x \cdot z}{I} \cdot ds$
$\int \frac{\sin^2 \alpha}{A} \cdot ds$	$\int \frac{\cos^2 \alpha}{A} \cdot ds$
$\int \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A} \cdot ds$	

4. Efecto de la temperatura.

Hasta ahora se ha considerado únicamente la acción de fuerzas exteriores, pero además hay que tener en cuenta los efectos de las dilataciones y contracciones producidas en el acero por cambio de temperatura.

Existen dos clases de deformaciones producidas por la variación de temperatura: las debidas a un cambio uniforme de la temperatura ambiental y las que corresponden a una diferencia de temperatura entre trasdós e intradós, suponiéndose una variación térmica lineal.

En el primer caso se produce un alargamiento o acortamiento uniforme de la directriz, y en el segundo, además, una deformación angular, también uniforme.

Para el análisis de esta sollicitación se utiliza el mismo artificio de permitir la deformación como viga isostática y volver la extremidad liberada a su posición primitiva, aplicando las reacciones de sustentación que le corresponden.

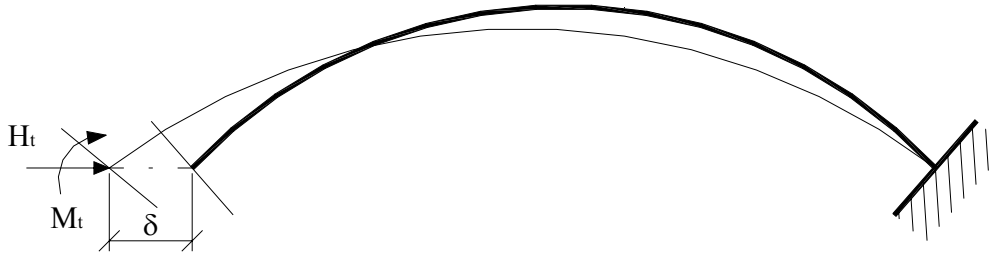


Figura 2.14. Alargamiento uniforme de la directriz.

En el caso de deformaciones lineales uniformes de la directriz, el alargamiento se puede obtener a partir de la expresión:

$$\delta = \int_0^l \alpha_t \cdot \Delta t \cdot dx = \int_0^l \alpha_t \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha \cdot ds = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \quad [2.18]$$

donde α_t es el coeficiente de dilatación térmica del acero e Δt el incremento de temperatura respecto a una situación de referencia. La ecuación [2.18] puede tener signo positivo o negativo, en función de que se trate de acortamiento o alargamiento.

Si se trata únicamente de acortamientos o alargamientos lineales uniformes de la directriz, no hay coacción para las deformaciones en dirección perpendicular a la cuerda y por tanto no existe componente vertical de las reacciones de los apoyos (figura 2.14).

Si además existen diferencias de deformación entre trasdós e intradós, la variación angular uniforme a lo largo de la directriz φ produce una deformación angular total y deformaciones horizontal y vertical (figura 2.15) cuyas componentes se obtienen a partir de la expresión [2.11], pudiéndose escribir:

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi \cdot \int ds \\ \delta &= \varphi \cdot \int z \cdot ds \\ \Delta &= \varphi \cdot \int x \cdot ds \end{aligned} \quad [2.19]$$

Por consiguiente, si se acumulan ambos efectos, se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} E \cdot \theta &= -E \cdot \varphi \cdot \int ds \\ E \cdot \delta &= -E \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l + E \cdot \varphi \cdot \int z \cdot ds \\ E \cdot \Delta &= -E \cdot \varphi \cdot \int x \cdot ds \end{aligned} \quad [2.20]$$

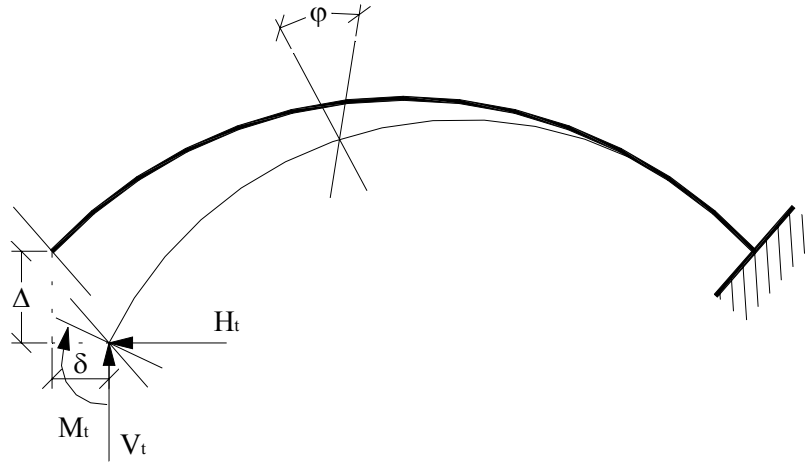


Figura 2.15. Deformación angular uniforme de la directriz.

Asimismo, el valor de la variación angular uniforme φ viene dado por:

$$\varphi = \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \quad [2.21]$$

donde $\frac{\Delta t}{h}$ representa el gradiente de temperatura entre trasdós e intradós.

De [2.17] y [2.20] se llega a:

$$\begin{aligned} -E \cdot \varphi \cdot \int ds &= M_1 \cdot \int \frac{1}{I} \cdot ds + V_1 \cdot \int \frac{x}{I} \cdot ds - H_1 \cdot \int \frac{z}{I} \cdot ds \\ -E \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l + E \cdot \varphi \cdot \int z \cdot ds &= -M_1 \cdot \int \frac{x}{I} \cdot ds + V_1 \cdot \left[-\int \frac{x^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\sin^2 \alpha}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \cos^2 \alpha}{A} \cdot ds \right] + \\ &\quad + H_1 \cdot \left[\int \frac{x \cdot z}{I} \cdot ds + \int \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A} \cdot ds + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A} \cdot ds \right] \\ -E \cdot \varphi \cdot \int x \cdot ds &= M_1 \cdot \int \frac{z}{I} \cdot ds + V_1 \cdot \left[-\int \frac{x \cdot z}{I} \cdot ds + \int \frac{\sin \alpha}{A} \cdot ds + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A} \cdot ds \right] + \\ &\quad + H_1 \cdot \left[-\int \frac{z^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\cos^2 \alpha}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \sin^2 \alpha}{A} \cdot ds \right] \end{aligned} \quad [2.22]$$

De este sistema se pueden obtener las reacciones hiperestáticas correspondientes al apoyo izquierdo.

5. Centro elástico. Método abreviado de Muller-Breslau.

Los coeficientes fijos de las incógnitas son independientes de la carga y admiten una interpretación mecánica, debida a Muller-Breslau, cuyo empleo permite una simplificación de las ecuaciones de la elasticidad.

Se supone que sobre la directriz de un arco se distribuye una masa cuyo valor unitario en cada punto de la directriz es $\frac{1}{I}$. A un elemento diferencial de arco ds le corresponde una masa $\frac{ds}{I}$.

Por tanto, las integrales $\int_0^s \frac{1}{I} \cdot ds$, $\int_0^s \frac{1}{I} \cdot z \cdot ds$, $\int_0^s \frac{1}{I} \cdot x \cdot ds$, $\int_0^s \frac{1}{I} \cdot x \cdot z \cdot ds$, $\int_0^s \frac{1}{I} \cdot z^2 \cdot ds$, $\int_0^s \frac{1}{I} \cdot x^2 \cdot ds$ son respectivamente la masa total, los momentos estáticos respecto a los ejes x , z , y los momentos rectangular y de inercia, también respecto a los ejes x , z .

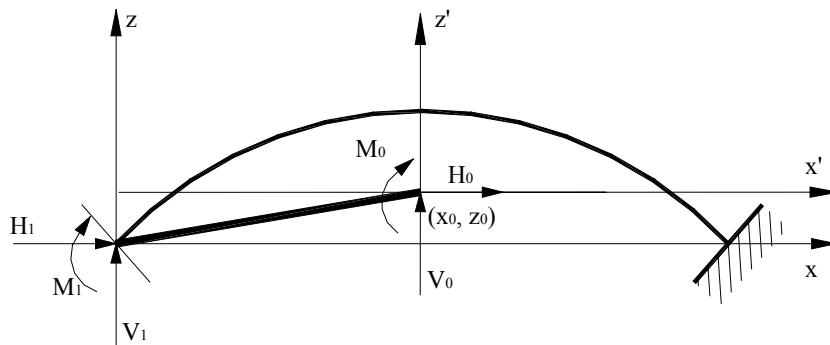


Figura 2.16. Ejes elásticos en un arco simétrico.

Así, se puede comprobar que si se toma como origen el centro de gravedad del sistema de masas, y como ejes los principales de inercia, se anulan tres de las integrales anteriores.

$$\int_0^s \frac{1}{I} \cdot z \cdot ds = 0$$

$$\int_0^s \frac{1}{I} \cdot x \cdot ds = 0$$

$$\int_0^s \frac{1}{I} \cdot x \cdot z \cdot ds = 0$$

Este centro de gravedad se denomina centro elástico del arco. Ahora bien, no es suficiente tomar origen en ese punto para que en las nuevas

ecuaciones de deformación sean nulos los coeficientes de ciertas incógnitas, pues en las ecuaciones originales [2.17] las reacciones hiperestáticas están directamente relacionadas con el sistema de ejes coordenados ubicado en la extremidad izquierda.

Por tanto, es necesario sustituir las incógnitas hiperestáticas H_1, V_1, M_1 por un sistema mecánicamente equivalente H, V, M aplicado en el centro elástico (figura 2.16). Para asegurar la actuación de estas fuerzas sobre el arco sin alterar sus características elásticas y modo de trabajar, se une el centro elástico al extremo izquierdo mediante una barra de rigidez infinita. Esta barra no se deformará ni almacenará trabajo, y por tanto las reacciones H, V, M aplicadas en el centro elástico equivalen desde el punto de vista mecánico y elástico a las primitivas H_1, V_1, M_1 .

Si las coordenadas del centro elástico son (x_0, z_0) respecto a los ejes x, z , esto significa que las coordenadas de la extremidad izquierda respecto a los ejes elásticos es $(-x_0, -z_0)$, por lo que la equivalencia entre ambos sistemas será:

$$\begin{aligned} H_0 &= H_1 \\ V_0 &= V_1 \\ M_0 &= M_1 - V_1 \cdot x_0 + H_1 \cdot z_0 \end{aligned} \quad [2.23]$$

En el caso más general de un arco asimétrico, los nuevos ejes x', z' están girados un ángulo ψ respecto a los ejes x, z asociados al arco, y por tanto se complican algo las expresiones.

Las condiciones que sirven para obtener los nuevos ejes son:

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{1}{I} \cdot z' \cdot ds &= 0 \\ \int_0^s \frac{1}{I} \cdot x' \cdot ds &= 0 \\ \int_0^s \frac{1}{I} \cdot x' \cdot z' \cdot ds &= 0 \end{aligned} \quad [2.24]$$

El sistema de ecuaciones [2.17] se simplifica transformándose en el [2.25]. En cada ecuación de este sistema únicamente interviene una sola de las reacciones de sustentación, lo que facilita el cálculo, pues se pueden obtener los valores de un modo explícito mediante una simple fracción. En el denominador de esta fracción sólo aparecen coeficientes fijos del arco, mientras que en el numerador aparecen coeficientes de carga.

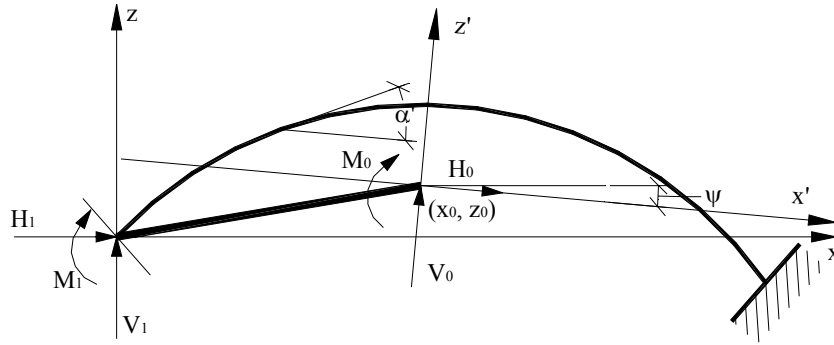


Figura 2.17. Ejes elásticos en un arco asimétrico.

$$\begin{aligned}
 E \cdot \theta_0 &= M_0 \cdot \int \frac{1}{I} \cdot ds + \int \frac{M_i}{I} \cdot ds \\
 E \cdot \Delta_0 &= V_0 \cdot \left[- \int \frac{x'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\sin^2 \alpha'}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \cos^2 \alpha'}{A} \cdot ds \right] + \\
 &\quad - \int \frac{M_i \cdot x'}{I} \cdot ds + \int \frac{N_i}{A} \cdot dz' - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dx' \\
 E \cdot \delta_0 &= H_0 \cdot \left[- \int \frac{z'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\cos^2 \alpha'}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \sin^2 \alpha'}{A} \cdot ds \right] + \\
 &\quad + \int \frac{M_i \cdot z'}{I} \cdot ds + \int \frac{N_i}{A} \cdot dx' + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dz'
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

La relación entre las componentes de la reacción virtual (en el centro elástico) y las reales (en extremidad izquierda) viene dada por:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= H_1 \cdot \cos \psi - V_1 \cdot \sin \psi \\
 V_0 &= V_1 \cdot \cos \psi + H_1 \cdot \sin \psi \\
 M_0 &= M_1 - V_1 \cdot x_0 + H_1 \cdot z_0
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

Las deformaciones que aparecen en el sistema [2.25] son las de la extremidad libre de la barra ficticia. Su relación con las de la extremidad solidaria del arco es:

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= \theta \\
 \Delta_0 &= (\Delta + \theta \cdot x_0) \cdot \cos \psi + (\delta + \theta \cdot z_0) \cdot \sin \psi \\
 \delta_0 &= (\delta + \theta \cdot z_0) \cdot \cos \psi + (\Delta + \theta \cdot x_0) \cdot \sin \psi
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Se puede comprobar que se conserva la deformación angular, pero varían los desplazamientos horizontal y vertical.

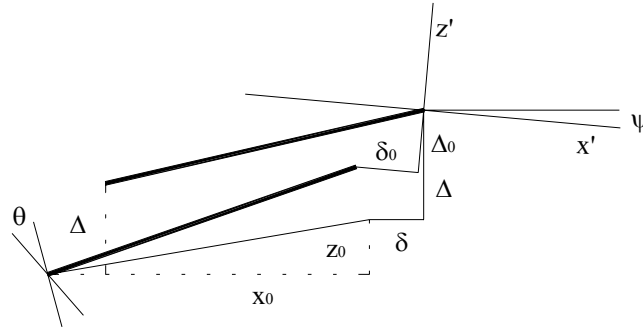


Figura 2.18. Deformaciones del centro elástico.

Si se estudian las variaciones de temperatura en el sistema de los ejes elásticos, para un alargamiento uniforme de la directriz, las deformaciones totales en el centro elástico, en el caso general de un arco asimétrico, son:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 0 \\ \Delta_0 &= -\alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \cdot \sin \psi \\ \delta_0 &= -\alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \cdot \cos \psi\end{aligned}\quad [2.28]$$

Al no existir fuerzas exteriores, a partir de los sistemas [2.25] y [2.28] se puede escribir:

$$\begin{aligned}0 &= M_0 \cdot \int \frac{1}{I} \cdot ds \\ -E \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \cdot \sin \psi &= V_0 \cdot \left[-\int \frac{x'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\sin^2 \alpha'}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \cos^2 \alpha'}{A} \cdot ds \right] \\ -E \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l \cdot \cos \psi &= H_0 \cdot \left[-\int \frac{z'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\cos^2 \alpha'}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \sin^2 \alpha'}{A} \cdot ds \right]\end{aligned}\quad [2.29]$$

Si el arco es simétrico, la reacción en el centro elástico es paralela a la cuerda, la línea de presiones es el eje elástico horizontal y los momentos flectores se obtienen multiplicando el empuje por las ordenadas de la directriz referida a los ejes elásticos.

En este caso de arco simétrico, la dirección de los ejes elásticos coincide con la de los ejes del arco, por lo que el ángulo ψ es nulo, y las expresiones [2.28] se transforman en:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \Delta_0 = 0 \\ \delta_0 &= -\alpha_t \cdot \Delta t \cdot l\end{aligned}$$

coincidentes con [2.18].

El sistema [2.29] se simplifica considerablemente, permitiendo la obtención de las reacciones en el centro elástico:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0 \\
 V_0 &= 0 \\
 H_0 &= \frac{-E \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot I}{\left[-\int \frac{z'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\cos^2 \alpha'}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \sin^2 \alpha'}{A} \cdot ds \right]} \quad [2.30]
 \end{aligned}$$

que se corresponden con las reacciones hiperestáticas:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -H_0 \cdot z_0 \\
 V_1 &= 0 \\
 H_1 &= H_0
 \end{aligned} \quad [2.31]$$

6. Arcos hiperestáticos.

6.1. Arcos biempotrados.

El arco doblemente empotrado es un sistema hiperestático de tercer grado, con tres reacciones superabundantes. Como las reacciones vienen definidas por seis valores diferentes, se precisan tres ecuaciones para complementar las tres que proporciona la Estática. Estas expresiones han de recoger las condiciones de deformabilidad debidas al sistema de sustentación, es decir, las ecuaciones de deformación ligadas a los extremos empotrados.

Las condiciones derivadas de los extremos empotrados son tres: invariabilidad de la luz, ausencia de desnivelación entre apoyos y que el giro relativo de las dos secciones extremas es nulo.

Para estudiar el arco hiperestático se recurre al arco en voladizo, que se deja deformar libremente por la actuación de fuerzas y causas exteriores. Posteriormente se lleva la extremidad libre a su posición verdadera mediante la aplicación de las reacciones de sustentación correspondientes a dicho extremo.

A la hora de calcular se puede seguir un doble camino, que por supuesto han de conducir al mismo resultado. En primer lugar se calcularían las deformaciones del voladizo debidas a las acciones exteriores. Posteriormente se obtendrían los corrimientos originados por las reacciones, suponiendo que

fueran acciones externas sobre el extremo virtualmente liberado. Por último se establecerían las ecuaciones complementarias, igualando dos a dos las deformaciones obtenidas.

Un método alternativo, pero equivalente, sería considerar como causa deformadora las fuerzas externas y las reacciones, igualando a cero las tres deformaciones totales.

Operando de este modo se obtendría el sistema [2.17], anulando sus primeros miembros. Si se utilizan los ejes elásticos genéricos representados en la figura 2.17 se alcanzaría el sistema [2.25], también con los primeros miembros de las ecuaciones anulados, lo que permitiría despejar explícitamente las reacciones H_0 , V_0 , M_0 .

$$\begin{aligned}
 M_0 &= - \frac{\int \frac{M_i}{I} \cdot ds}{\int \frac{1}{I} \cdot ds} \\
 V_0 &= \frac{\int \frac{M_i \cdot x'}{I} \cdot ds - \int \frac{N_i}{A} \cdot dz' + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dx'}{\left[- \int \frac{x'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\sin^2 \alpha'}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \cos^2 \alpha'}{A} \cdot ds \right]} \\
 H_0 &= \frac{- \left[\int \frac{M_i \cdot z'}{I} \cdot ds + \int \frac{N_i}{A} \cdot dx' + \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot Q_i}{A} \cdot dz' \right]}{\left[- \int \frac{z'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{\cos^2 \alpha'}{A} \cdot ds - \frac{E}{G} \cdot \int \frac{\chi \cdot \sin^2 \alpha'}{A} \cdot ds \right]}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

En estas fracciones que definen las reacciones en el centro elástico los coeficientes fijos se encuentran en los denominadores, mientras que los coeficientes de carga constituyen los numeradores.

Las reacciones hiperestáticas buscadas en el apoyo izquierdo H_1 , V_1 , M_1 , se obtienen mediante las relaciones:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{\cos \psi} \cdot (H_0 + V_0 \cdot \sin \psi) \\
 V_1 &= \frac{1}{\cos \psi} \cdot (V_0 - H_0 \cdot \sin \psi) \\
 M_1 &= M_0 + V_1 \cdot x_0 + H_1 \cdot z_0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

siendo (x_0, z_0) las coordenadas del centro elástico respecto a los ejes x , z .

Si como es habitual, se prescinde de los efectos correspondientes al esfuerzo cortante y de la componente vertical de la compresión longitudinal ($\alpha' \cong 0$), se llega a:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha' &\cong 1 \\
 \sin \alpha' &\cong 0 \\
 M_0 &= - \frac{\int \frac{M_i}{I} \cdot ds}{\int \frac{1}{I} \cdot ds} \\
 V_0 &= \frac{\int \frac{M_i \cdot x'}{I} \cdot ds}{-\int \frac{x'^2}{I} \cdot ds} \\
 H_0 &= \frac{- \left[\int \frac{M_i \cdot z'}{I} \cdot ds + \int \frac{N_i}{A} \cdot dx' \right]}{\left[- \int \frac{z'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{1}{A} \cdot ds \right]}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Si se simplifica aún más, se puede despreciar el efecto debido a la compresión longitudinal, con lo que el sistema [2.34] se escribe:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= - \frac{\int \frac{M_i}{I} \cdot ds}{\int \frac{1}{I} \cdot ds} \\
 V_0 &= \frac{\int \frac{M_i \cdot x'}{I} \cdot ds}{-\int \frac{x'^2}{I} \cdot ds} \\
 H_0 &= \frac{- \int \frac{M_i \cdot z'}{I} \cdot ds}{\left[- \int \frac{z'^2}{I} \cdot ds + \int \frac{1}{A} \cdot ds \right]}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Para los efectos debidos a deformaciones lineales uniformes las expresiones [2.29] proporcionan las componentes de la reacción en el centro elástico. Esta reacción es una fuerza aplicada en dicho centro elástico, y la distribución de momentos flectores se obtiene multiplicando esta fuerza por las ordenadas del arco referidas a su línea de acción, la cual es además línea de

presiones. El diagrama de momentos flectores de la figura 2.19 es válido para un aumento de la temperatura.

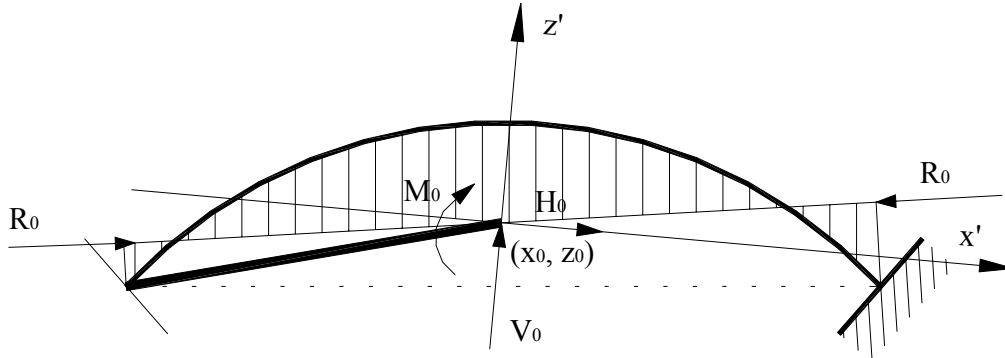


Figura 2.19. Alargamiento uniforme de la directriz.

6.1.1. Caso de arco simétrico.

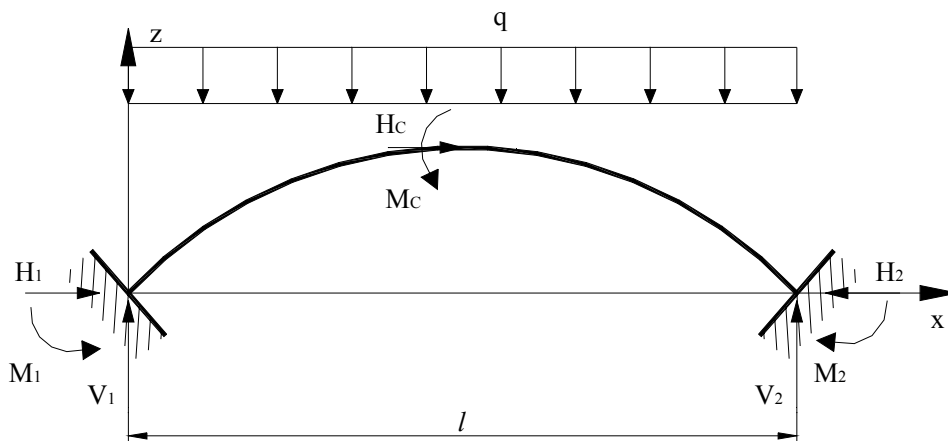


Figura 2.20. Arco biempotrado simétrico con carga simétrica.

Si el arco es simétrico, uno de los ejes elásticos es el de simetría. Para determinar el otro, basta calcular la ordenada del centro elástico.

Cuando las cargas se distribuyen de modo simétrico o antisimétrico, puede simplificarse la obtención de las reacciones. Claro está que las simplificaciones de estas dos situaciones particulares tienen aplicación a cualquier otro caso, ya que toda distribución de cargas equivale a la suma de una simétrica y una antisimétrica (teorema de Andréé).

Suponiendo una distribución simétrica, se obtienen directamente cuatro ecuaciones: tres correspondientes a las de equilibrio de reacciones, y una nueva expresando la simetría de éstas. Así:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_2 = \frac{1}{2} \cdot \sum F \\
 H_1 &= -H_2 \\
 M_1 &= -M_2
 \end{aligned}
 \quad [2.36]$$

Se requieren dos ecuaciones complementarias, que corresponderán a la nulidad de deformaciones angulares y horizontales a todo lo largo del arco. También se verifica que entre un extremo y la clave, estas deformaciones son nulas, pues esta sección sólo puede moverse en su plano. Si se prescinde de las deformaciones transversales, las expresiones complementarias de las reacciones [2.36] son:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= - \frac{\int \frac{M_i}{I} \cdot ds}{\int \frac{1}{I} \cdot ds} \\
 H_0 &= \frac{- \int \frac{M_i \cdot z}{I} \cdot ds}{\left[- \int \frac{z^2}{I} \cdot ds + \int \frac{1}{A} \cdot ds \right]}
 \end{aligned}
 \quad [2.37]$$

referidas a los ejes elásticos. Las integrales pueden extenderse de un extremo al otro, o de la clave a un extremo.

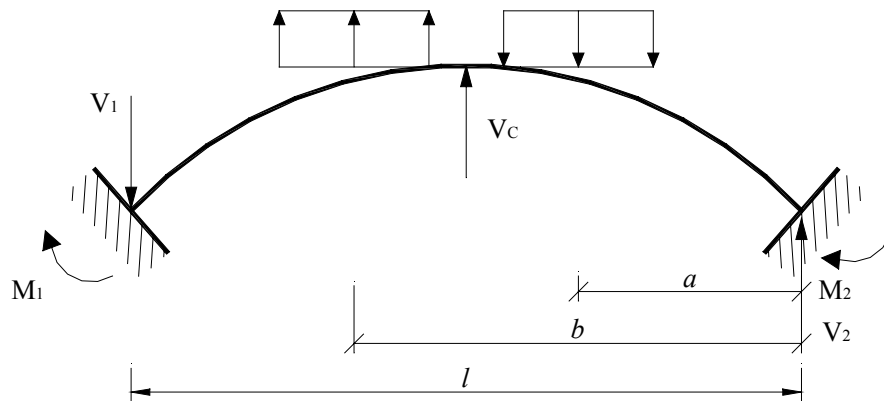


Figura 2.21. Arco biempotrado simétrico con carga antisimétrica.

Si la distribución es antisimétrica (figura 2.21) se dispone también de cuatro ecuaciones, que son:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= -V_2 \\
 H_1 &= H_2 = 0 \\
 M_1 &= M_2
 \end{aligned}$$

$$2 \cdot M_1 - V_1 \cdot l + \sum F \cdot (b - a) = 0$$

La simplificación en las expresiones que se obtienen es mayor que en el caso anterior, pues desaparecen los empujes y quedan únicamente el par de empotramiento y la reacción vertical relacionados con una ecuación de la Estática. Por tanto, las reacciones se deducen a partir de las relaciones previas y mediante una de las fórmulas de las deformaciones:

$$V_1 = \frac{\int \frac{M_1 \cdot x}{I} \cdot ds}{-\int \frac{x^2}{I} \cdot ds} \quad [2.38]$$

$$M_1 = \frac{-V_1 \cdot l + \sum F \cdot (b - a)}{2}$$

Si se corta por la clave, la acción mutua de las dos mitades de arco consta únicamente de una componente vertical. Si se desea reducir las integrales a medio arco, es preciso tomar siempre esta reacción vertical en clave, pues la deformación angular en esta sección no es nula.

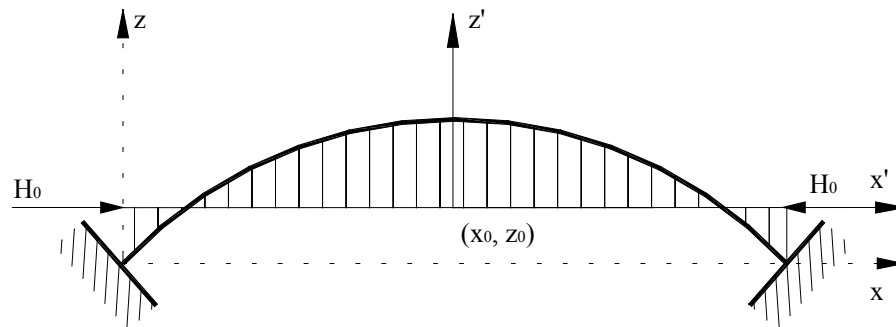


Figura 2.22. Alargamiento uniforme de la directriz en un arco biempotrado simétrico.

Para deformaciones lineales de la directriz, la reacción en el centro elástico es una fuerza horizontal, definida por:

$$H_0 = \frac{-E \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l}{\left[-\int \frac{z^2}{I} \cdot ds + \int \frac{1}{A} \cdot ds \right]} \quad [2.39]$$

La línea de presiones coincide con el eje elástico horizontal (figura 2.22), y los momentos flectores del arco se obtienen multiplicando el empuje por las ordenadas de la directriz.

Como los momentos de los pares de empotramiento igualan al producto de las ordenadas en los extremos por el empuje, se puede equiparar la solicitación a la producida por dos fuerzas aplicadas en las secciones extremas a la altura del centro elástico.

6.2. Arcos biarticulados.

Las reacciones vienen definidas por cuatro valores diferentes: dos componentes horizontales y dos verticales. Por tanto, el grado de hiperestaticidad de la estructura es uno, lo que indica que es necesario complementar las ecuaciones de la Estática con una condición más.

De igual manera que en los arcos doblemente empotrados, la ecuación complementaria se obtiene analizando las condiciones de sustentación. Así, para el caso de los arcos con los extremos articulados, la ecuación complementaria se consigue al imponer una distancia entre apoyos invariable. Basta igualar a cero el desplazamiento horizontal en el sistema general de ecuaciones de deformaciones definido por [2.17] para obtener la expresión que, junto con el sistema obtenido por la Estática, lo convierte en compatible determinado.

El problema estructural del arco de dos atenciones se puede estudiar a partir de la viga curva isostáticamente sustentada (figura 2.3). En principio se permite que la viga curva se deforme libremente bajo la acción de las causas externas, a consecuencia de lo cual el extremo virtualmente liberado se desplazará en dirección de la cuerda. Para que este extremo recupere su verdadera posición es necesario aplicar una fuerza en esa misma dirección. Las componentes verticales de las reacciones, al no existir momentos de empotramiento, son idénticas a las de la viga curva correspondiente.

Si se desea emplear las simplificaciones que proporciona el uso de los ejes elásticos, es conveniente reflexionar y comprobar que se dispone de uno de estos ejes desde el comienzo del cálculo, pues las articulaciones definen los puntos de paso para su determinación (figura 2.23). La abscisa del centro elástico respecto a la extremidad izquierda se determina mediante:

$$x_0 = \frac{\int \frac{x}{E \cdot I} \cdot ds}{\int \frac{1}{E \cdot I} \cdot ds}$$

Si el arco es simétrico, el centro elástico se encuentra en la mitad de la cuerda.

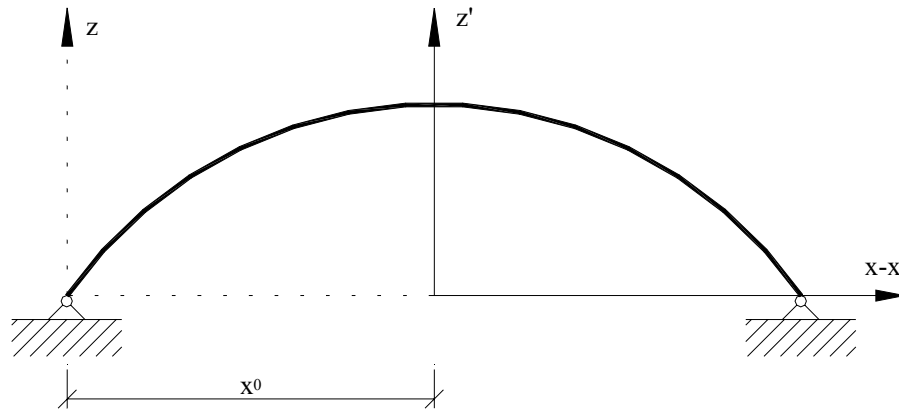


Figura 2.23. Ejes elásticos en un arco biarticulado.

Si se desprecian los efectos de los esfuerzos longitudinales y transversales, el empuje se obtiene por:

$$H_0 = \frac{-\left[\int \frac{M_i \cdot z}{I} \cdot ds + \int \frac{N_i}{A} \cdot dx\right]}{\left[-\int \frac{z^2}{I} \cdot ds + \int \frac{1}{A} \cdot ds\right]} \quad [2.40]$$

Si se simplifica aún más, se puede despreciar el efecto debido a la compresión longitudinal, con lo que el empuje [2.40] se escribe:

$$H_0 = \frac{\int \frac{M_i \cdot z}{I} \cdot ds}{\int \frac{z^2}{I} \cdot ds} \quad [2.41]$$

Estas expresiones del empuje tienen el mismo aspecto que las análogas [2.34] y [2.35] obtenidas para arcos biempotrados, con la diferencia que la ordenada z se refiere ahora a la cuerda del arco.

Las deformaciones principales que origina la variación de temperatura son los alargamientos o acortamientos uniformes de la directriz. Para estos efectos, las reacciones son horizontales y el empuje viene dado por [2.39].

Cuando se producen estas deformaciones uniformes de la directriz, los momentos flectores se obtienen multiplicando los empujes [2.39] por las ordenadas de la directriz con respecto a la cuerda (figura 2.24).

El denominador del empuje, que se mantiene invariable en todas las hipótesis de sollicitación, resulta notablemente mayor que el conseguido para el

arco biempotrado, pues los valores de z^2 son mayores. Esto indica que el empuje del arco es más reducido que en el arco con extremos empotrados para solicitaciones análogas, lo que denota una menor eficacia del arco.

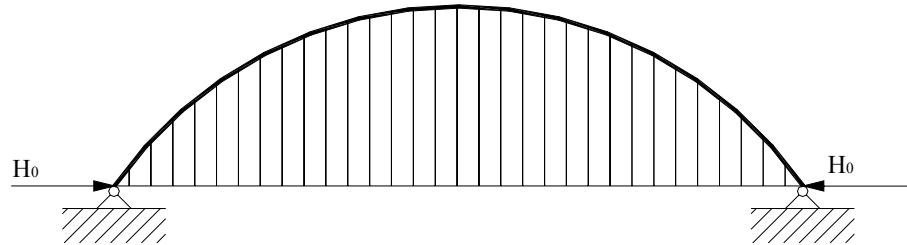


Figura 2.24. Alargamiento uniforme de la directriz en arcos biarticulados.

En el caso de deformaciones lineales uniformes, al disminuir el empuje se dispone de momentos flectores inferiores a los que se obtienen en arcos biempotrados, aunque las ordenadas por las que haya que multiplicar dicho empuje sean superiores.

Capítulo 3

Cálculo de arcos por métodos energéticos.

1.	Introducción	63
2.	Estructuras isostáticas auxiliares	63
2.1.	Viga curva isostáticamente sustentada.....	64
2.2.	Arco en voladizo	65
3.	Arcos biarticulados.....	66
3.1.	Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación	71
3.2.	Cálculo tabular	73
3.3.	Arco parabólico biarticulado con inercia reducida constante y sometido a una carga uniforme según la cuerda	75
3.4.	Efecto de la temperatura.....	80
4.	Arcos biempotrados.....	82
4.1.	Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación	85
4.2.	Arco parabólico doblemente empotrado, con inercia reducida constante.....	89
4.3.	Efecto de la temperatura.....	94

Capítulo 3

Cálculo de arcos por métodos energéticos

1. Introducción.

Analizados ya los arcos biarticulados y biempotrados, así como las estructuras isostáticas auxiliares utilizadas para su estudio, se van a obtener las expresiones que sirven para resolver estas estructuras hiperestáticas empleando un enfoque distinto, menos ligado a la evidencia tangible que suponen las deformaciones.

Como es lógico, los resultados deben coincidir, pues todos los métodos de cálculo parten de las mismas hipótesis y manejan las mismas magnitudes, aunque el camino empleado hasta desembocar en la resolución sea muy diferente.

2. Estructuras isostáticas auxiliares.

La viga curva isostáticamente sustentada y el arco en ménsula han sido las estructuras que se han elegido para facilitar el cálculo de los arcos hiperestáticos objeto de estudio: el arco con dos articulaciones y el arco con ambos extremos empotrados.

Como es normal, en primer lugar se determinan las ecuaciones que proporciona la Estática. Estas expresiones, recogidas en [2.1] para la viga curva y en [2.6] para el arco en voladizo, necesitan de una o de tres condiciones complementarias, dependiendo del grado de hiperestaticidad de la estructura original. Estas ecuaciones complementarias se van a obtener ahora aplicando el principio de los trabajos virtuales.

Para la completa resolución de estas barras isostáticas auxiliares falta establecer el valor de los esfuerzos M_i , N_i , Q_i en una sección genérica (x, z) (figuras 2.1 y 2.5). Las expresiones que describen la variación de estas fuerzas de sección isostáticas están descritas en [2.2] para la viga curva y en [2.7] para el arco en ménsula.

2.1. Viga curva isostáticamente sustentada.

Si se tiene en cuenta que la incógnita hiperestática del arco biarticulado es el empuje H_1 , será necesario recurrir a expresiones que recojan la deformación que produce esta componente de la reacción.

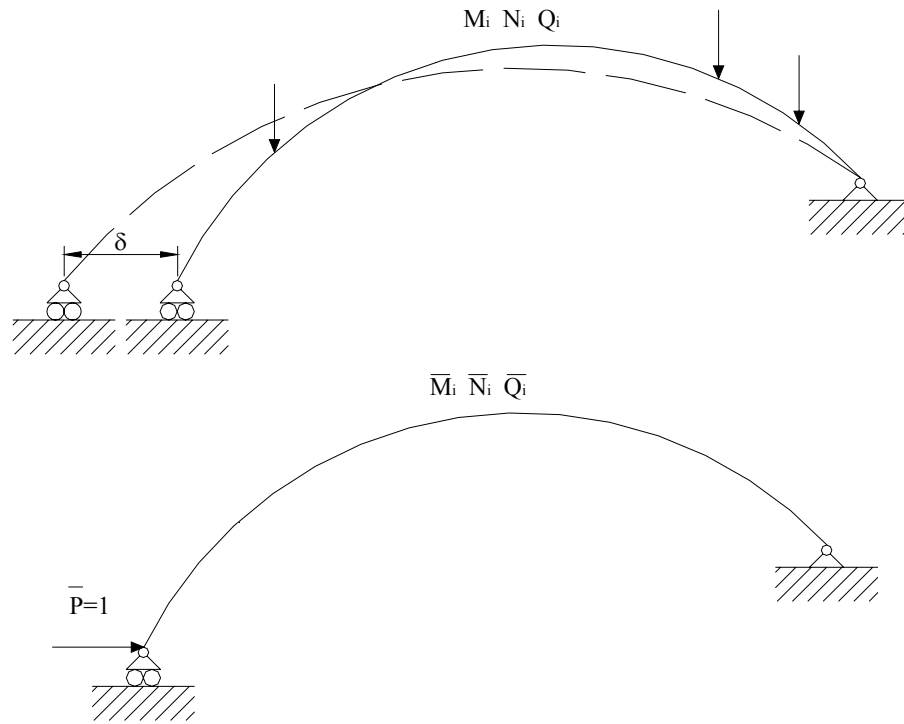


Figura 3.1. Aplicación del PTV para obtener la deformación horizontal.

El conocimiento de la deformación puede necesitarse en un punto determinado y según una dirección, para lo que puede emplearse la ecuación de los trabajos virtuales:

$$\delta = \int_0^s \frac{N_i \cdot \bar{N}_i}{E \cdot A} \cdot ds + \int_0^s \frac{M_i \cdot \bar{M}_i}{E \cdot I} \cdot ds + \int_0^s \chi \cdot \frac{Q_i \cdot \bar{Q}_i}{G \cdot A} \cdot ds \quad [3.1]$$

siendo M_i , N_i , Q_i las componentes de la resultante exterior debida a la carga y \bar{M}_i , \bar{N}_i , \bar{Q}_i las componentes originadas por una fuerza virtual unidad actuando en el punto cuyo desplazamiento se busca, orientada en la dirección correspondiente (figura 3.1).

El método operativo es analítico y la resolución de las integrales podría realizarse tabularmente.

2.2. Arco en voladizo.

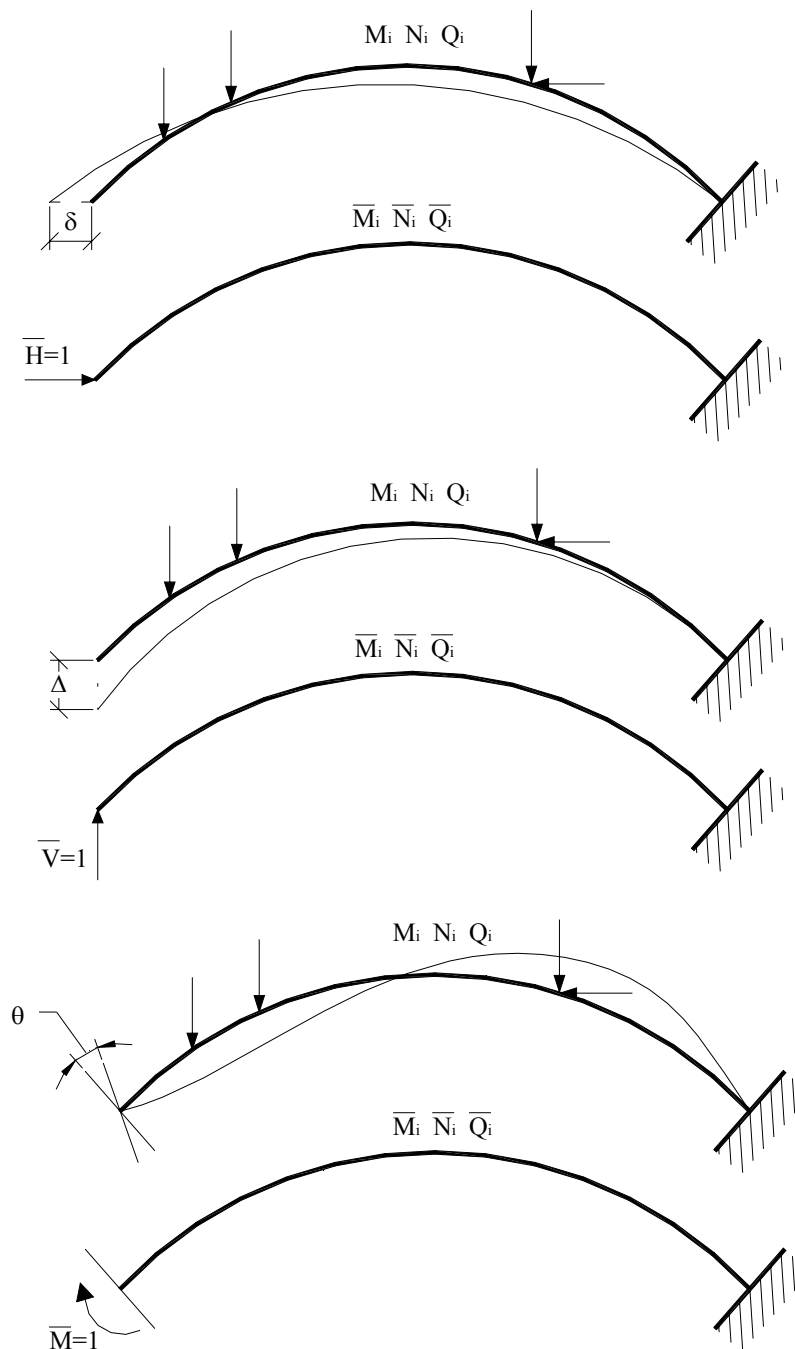


Figura 3.2. Aplicación del PTV en arcos en ménsula.

El arco en ménsula se consigue al liberar una de las extremidades del arco biempotrado. Por tanto, el extremo libre podrá desplazarse horizontal, verticalmente, y girar. La restauración de la posición primitiva del borde liberado se puede conseguir mediante la aplicación sucesiva del principio de los trabajos virtuales, superponiendo los efectos de las distintas situaciones.

Este planteamiento servirá de base para plantear las ecuaciones complementarias a las de la Estática y resolver el problema hiperestático.

3. Arcos biarticulados.

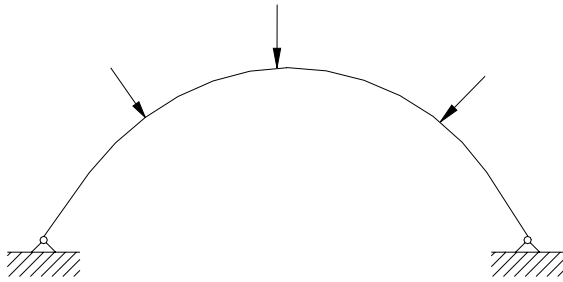


Figura 3.3. Arco biarticulado.

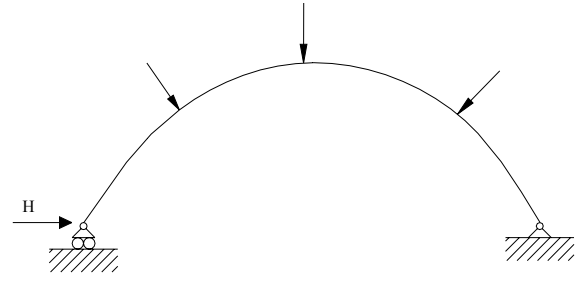


Figura 3.4. Viga curva apoyada en dilatación en su extremo izquierdo.

Casi siempre el arco es simétrico y con las articulaciones de apoyo a nivel (figura 3.3). Estas articulaciones suman cuatro condiciones para una sola barra, por lo que el sistema es hiperestático de primer orden. Como sistema isostático principal se elige la viga curva apoyada en dilatación en su extremo izquierdo, siendo la reacción hiperestática el empuje horizontal (figura 3.4).

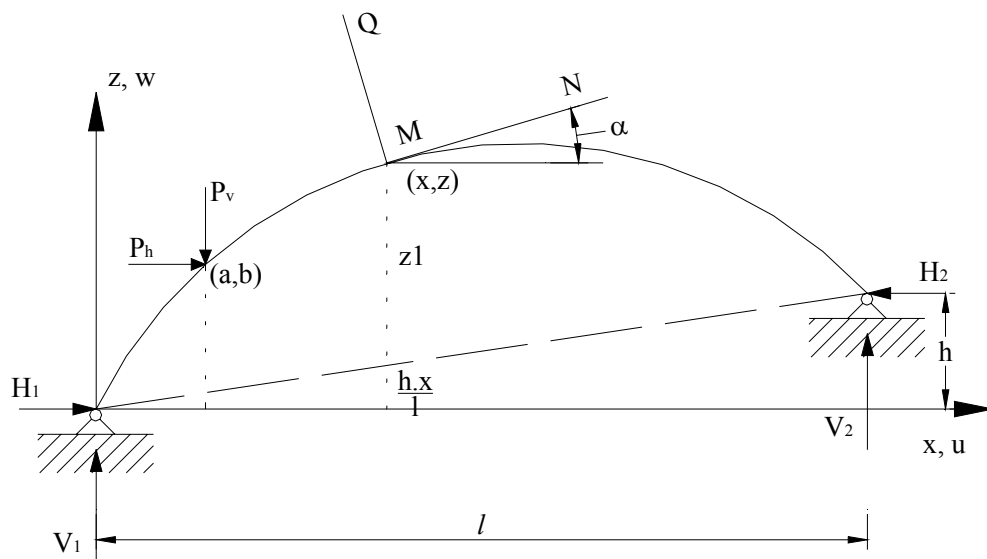


Figura 3.5. Arco biapoyado.

Para más generalidad se supone que las articulaciones se encuentran a distinto nivel y se prescinde de toda simetría. Se toma como origen la articulación izquierda, el eje x horizontal y el eje z vertical (figura 3.5).

En el arco biarticulado, las ecuaciones de la Estática conducen a:

$$\begin{aligned}
V_1 + V_2 - \sum_0^s P_v &= 0 \\
H_2 - \sum_0^s P_h &= 0 \\
V_1 \cdot l - H_1 \cdot h - \sum_0^s P_v \cdot (l - a) - \sum_0^s P_h \cdot (h - b) &= 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Si se despeja la componente de la reacción V_1 se obtiene:

$$V_1 = \frac{1}{l} \cdot \left(\sum_0^s P_v \cdot (l - a) + \sum_0^s P_h \cdot (h - b) \right) + H_1 \cdot \frac{h}{l}$$

y si se emplea la expresión de la reacción isostática V_{1i} de la viga en arco, recogida en [2.1], se puede escribir:

$$V_1 = V_{1i} + H_1 \cdot \frac{h}{l} \tag{3.3}$$

Del mismo modo, la componente de la reacción V_2 queda definida por:

$$V_2 = V_{2i} - H_1 \cdot \frac{h}{l}$$

En cuanto a las componentes de la resultante interna:

$$M = V_1 \cdot x - H_1 \cdot z - \sum_0^x P_v \cdot (x - a) - \sum_0^x P_h \cdot (z - b)$$

Sustituyendo la expresión de V_1 dada en [3.3] y utilizando el momento flector isostático de la viga curvada M_i definido en [2.2], se obtiene:

$$M = M_i - H_1 \cdot \left(z - \frac{h}{l} \cdot x \right)$$

Si se tiene en cuenta que:

$$z - \frac{h}{l} \cdot x = z_1 \tag{3.4}$$

la expresión del momento en una sección genérica de coordenadas (x, z) es:

$$M = M_i - H_1 \cdot z_1 \quad [3.5]$$

El esfuerzo normal en la misma sección genérica viene dado por:

$$N = \left(V_1 - \sum_0^x P_v \right) \cdot \operatorname{sen} \alpha + \left(H_1 + \sum_0^x P_h \right) \cdot \cos \alpha$$

Si se sustituye el valor de V_1 de [3.3] y se recupera la definición del esfuerzo normal isostático de la viga curva N_i recogido en [2.2], se tiene:

$$N = N_i - H_1 \cdot \left(\cos \alpha + \frac{h}{l} \cdot \operatorname{sen} \alpha \right) \quad [3.6]$$

Por último, el esfuerzo cortante en el arco biapoyado vale:

$$Q = \left(V_1 - \sum_0^x P_v \right) \cdot \cos \alpha - \left(H_1 + \sum_0^x P_h \right) \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Al sustituir el valor de V_1 dado por [3.3] e introducir el esfuerzo cortante isostático de la viga curva Q_i definido en [2.2], se obtiene:

$$Q = Q_i - H_1 \cdot \left(\operatorname{sen} \alpha - \frac{h}{l} \cdot \cos \alpha \right) \quad [3.7]$$

Los arcos que se consideran se suponen de radio de curvatura grande en comparación con las dimensiones transversales de la sección, por lo que se puede emplear la expresión del trabajo W o de la energía de deformación U propia de las piezas rectas. Así,

$$W = U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^s \frac{N^2}{E \cdot A} \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot \int_0^s \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot \int_0^s \chi \cdot \frac{Q^2}{G \cdot A} \cdot ds + \int_0^s N \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot ds + \int_0^s M \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds \quad [3.8]$$

donde χ es el coeficiente de forma de la sección, α_t es el coeficiente de dilatación térmica, Δt el incremento de temperatura respecto a una situación térmica de referencia y $\frac{\Delta t}{h}$ representa el gradiente de temperatura entre trasdós e intradós.

El corrimiento del apoyo izquierdo deberá ser nulo, lo que por aplicación del teorema de Castigliano se traduce en

$$\frac{\partial W}{\partial H_1} = 0 \quad [3.9]$$

Al derivar W como función compuesta, teniendo presente que M , N y Q han sido expresadas en función de M_i , N_i , Q_i y de la incógnita hiperestática H_1 (expresiones [3.5] a [3.7]), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial H_1} &= -z_1 \\ \frac{\partial N}{\partial H_1} &= \cos \alpha + \frac{h}{l} \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \frac{\partial Q}{\partial H_1} &= -\operatorname{sen} \alpha + \frac{h}{l} \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad [3.10]$$

De las expresiones [3.8] a [3.10] se deduce:

$$\begin{aligned} &\int_0^s \frac{N}{E \cdot A} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{h}{l} \cdot \operatorname{sen} \alpha \right) \cdot ds - \int_0^s \chi \cdot \frac{Q}{G \cdot A} \cdot \left(\operatorname{sen} \alpha - \frac{h}{l} \cdot \cos \alpha \right) \cdot ds + \\ &- \int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds + \int_0^s \left(\cos \alpha + \frac{h}{l} \cdot \operatorname{sen} \alpha \right) \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot ds - \int_0^s z_1 \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot ds = 0 \end{aligned} \quad [3.11]$$

Esta ecuación contiene implícitamente la incógnita hiperestática H_1 y que unida a las tres ecuaciones de la Estática descritas en [3.2] permite la resolución del sistema.

Para concluir el estudio analítico se va a prescindir del efecto de la temperatura, en general secundario y que, a lo más, es un término correctivo, y se suprime el término correspondiente al esfuerzo cortante por su poca influencia.

Por tanto, la expresión [3.11] se reduce a:

$$\int_0^s \frac{N}{E \cdot A} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{h}{l} \cdot \operatorname{sen} \alpha \right) \cdot ds - \int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds = 0 \quad [3.12]$$

siendo z_1 la ordenada vertical función de x comprendida entre el arco y la cuerda que une las articulaciones, y que viene definida por la ecuación [3.4].

Esta expresión aún puede hacerse más sencilla, prescindiendo de los esfuerzos normales. Para justificar esta simplificación considérese un arco biarticulado peraltado sometido a una carga uniformemente repartida en toda su luz. La directriz de este arco es una parábola de segundo grado, que corresponde al antifunicular de las cargas aplicadas. Si se estudia la evolución de los esfuerzos normales y de los momentos flectores desde este arco hasta la viga biapoyada proyección, se pueden extraer interesantes conclusiones.

La influencia del esfuerzo normal en la deformación del arco, expresada por la primera integral, es pequeña en arcos peraltados, no sólo por ser pequeños los valores de N , sino porque sus efectos carecen de importancia. En arcos peraltados con directriz antifunicular de las cargas, además, el momento es nulo. Si se disminuye progresivamente la flecha del arco, el esfuerzo normal N va creciendo, y si el arco no se acortase por compresión el momento seguiría siendo nulo. En el límite, debería suceder que $N=\infty$ y $M=0$ para la viga proyección, cosa que no ocurre, pues es bien conocido que en ellas N es nulo y M alcanza un valor finito.

La causa de este comportamiento aparentemente anómalo es el acortamiento del arco. Cuando el arco es muy rebajado, está sometido a un fuerte régimen de compresiones, que por reducción en la longitud de la directriz obliga al arco a buscar una forma de equilibrio más recta, apareciendo flexiones por el cambio de curvatura, y provocando un régimen positivo de momentos. Aparecen compresiones en la fibra superior del arco y tracciones en la fibra inferior, tal y como sucede en vigas, que representa el caso límite del arco rebajado.

Por tanto, de la expresión [3.12] podrá prescindirse del acortamiento de la directriz representado por el primer término de la ecuación de deformación en los arcos peraltados, quedando:

$$-\int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds = 0 \quad [3.13]$$

Recurriendo a las expresiones [3.5] y [3.13] se obtiene la siguiente ecuación para este tipo de arcos:

$$-\int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds + H_1 \cdot \int_0^s \frac{z_1}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds = 0$$

de donde se puede despejar la incógnita superabundante H_1 .

$$H_1 = \frac{\int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds}{\int_0^s \frac{z_1^2}{E \cdot I} \cdot ds} \quad [3.14]$$

Si no se simplificasen los efectos del esfuerzo normal, la expresión del empuje H_1 hubiera sido:

$$H_1 = \frac{\int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds + \int_0^s \frac{N_i}{A \cdot E} \cdot \cos \alpha \cdot ds + \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l + \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot \int_0^s z_1 \cdot ds}{\int_0^s \frac{z_1^2}{E \cdot I} \cdot ds + \int_0^s \frac{\cos^2 \alpha}{A \cdot E} \cdot ds} \quad [3.15]$$

Esta ecuación incluye en el numerador los efectos térmicos completos^(*), es decir, el doble efecto que produce una diferencia de temperatura respecto a una situación de referencia, y que se traduce en un alargamiento o acortamiento uniforme de la directriz del arco, y el efecto que produce una diferencia de temperatura entre trasdós e intradós, que se traduce en una deformación angular que conlleva un giro, desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical, aunque bien es verdad que de pequeña magnitud. De cualquier modo, conviene recordar que sí se ha simplificado la influencia del esfuerzo cortante.

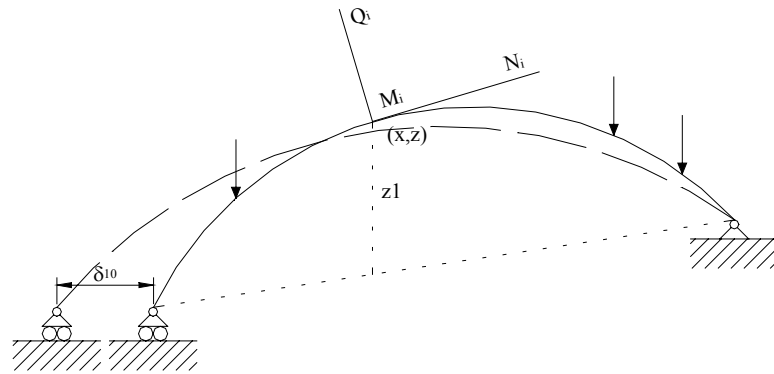


Figura 3.6. Efectos de la causa deformadora.

3.1. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación.

Para comprender la interpretación física de los coeficientes de la ecuación de deformación [3.12] se va estudiar el recorrido que experimenta el

^(*) Ya se han descrito los efectos térmicos en el Apartado 4 del Capítulo 2.

extremo izquierdo de la viga en dilatación, empleada como sistema isostático auxiliar.

Se va a utilizar el principio de los trabajos virtuales, en función del momento isostático $M_i(x)$ producido por el sistema de cargas externas (figura 3.6) y del momento isostático virtual $\bar{M}_i(x)$ originado por la acción de una carga virtual unidad actuando horizontalmente en la extremidad izquierda (figura 3.7).

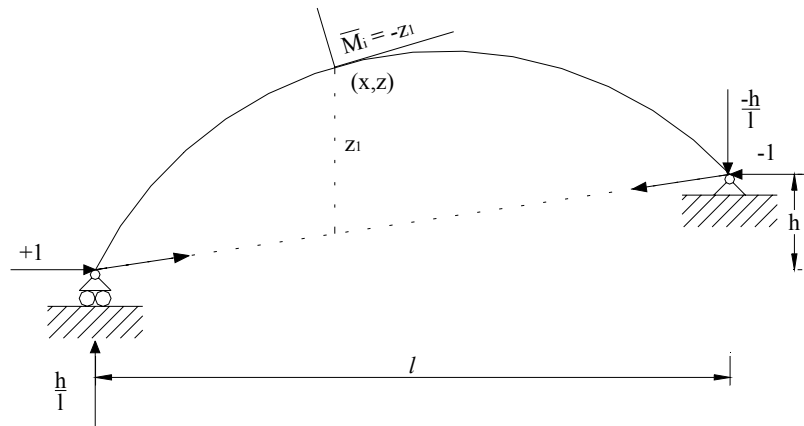


Figura 3.7. Efectos de la causa virtual.

Las reacciones en este segundo estado de carga se obtienen aplicando las ecuaciones de la Estática. Así:

$$\begin{aligned} V_{1i} + V_{2i} &= 0 \\ H_{2i} + 1 &= 0 \rightarrow H_{2i} = -1 \\ V_{1i} \cdot l - 1 \cdot h &= 0 \rightarrow V_{1i} = \frac{h}{l} = -V_{2i} \end{aligned}$$

El momento flector en la sección de coordenadas genéricas (x, z) es:

$$\frac{h}{l} \cdot x - 1 \cdot \left(z_1 + \frac{h}{l} \cdot x \right) - \bar{M} = 0; \rightarrow \bar{M} = -z_1$$

La extremidad izquierda de la pieza isostática sufre un desplazamiento por la acción de las cargas, que se designa por δ_{10} y se calcula mediante la expresión de los trabajos virtuales, considerando únicamente la influencia de los momentos. En este caso (figura 3.6), el desplazamiento δ_{10} es negativo, al tener en cuenta el sentido de los ejes. Así, llamando a los momentos reales $M = M_i$ y a los momentos virtuales $\bar{M} = -z_1$, se obtiene:

$$\delta_{10} = - \int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds$$

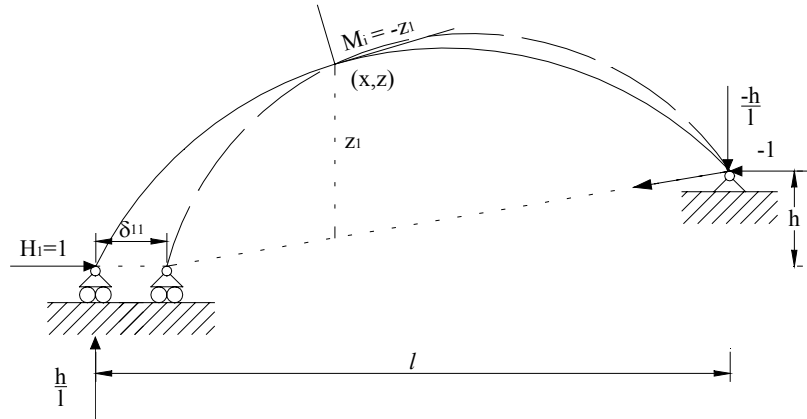


Figura 3.8. Obtención de δ_{11} mediante el PTV.

La fuerza $H_1=1$ produce un recorrido δ_{11} en la pieza isostática (figura 3.8), que calculado de nuevo mediante el principio de los trabajos virtuales, llamando a los momentos reales $M = -z_1$ y a los momentos virtuales $\bar{M} = -z_1$, se tiene:

$$\delta_{11} = + \int_0^s \frac{z_1}{E \cdot I} \cdot z_1 \cdot ds$$

Con estos resultados la ecuación de deformación toma la forma:

$$\delta_{10} + H_1 \cdot \delta_{11} = 0 \quad [3.16]$$

que expresa que el valor de H_1 debe ser tal que la suma del recorrido experimentado en el apoyo izquierdo originado por las cargas más el producido por el empuje sea cero (condición de apoyo fijo).

3.2. Cálculo tabular.

Cuando la integración se complica por la expresión matemática elegida para la directriz o porque las inercias de los perfiles seleccionados varían continuamente, se desarrollará el cálculo tabularmente empleando, por ejemplo, la fórmula de los trapecios.

Se divide el arco en partes iguales Δs y se calculan en cada uno de los intervalos las ordenadas z_i , así como el momento isostático M_i correspondiente, y las dimensiones b y d de la sección transversal que permite obtener el valor

del momento de inercia I , procediendo en el orden que se muestra en la tabla 3.1.

Se hace intervenir el coeficiente $I_0/I \cdot \cos \alpha$, donde I_0 representa el momento de inercia de la sección transversal del perfil elegido en la clave. La integración se realiza según x . Al ser z_i y M_i funciones de x , se puede proceder a su resolución analítica.

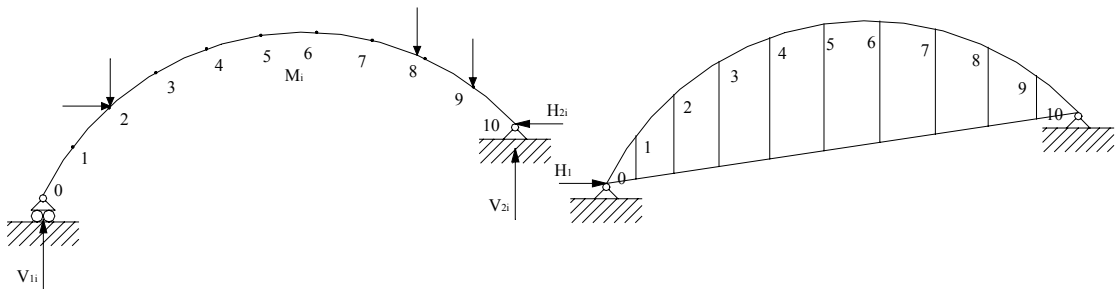


Figura 3.9. Construcciones para el cálculo tabulado de arcos.

<p>Tabla 3.1. Cálculo tabulado de arcos.</p>								
Punto	b	d	I	z_i	$\frac{z_i}{I} \cdot z_i$	M_i	$\frac{M_i}{I} \cdot z_i$	$M = M_i - H_1 \cdot z_i$
1								
2								
3								
...								
9								
					\sum_{11}		\sum_{10}	

Al rellenar la tabla puede prescindirse de los puntos extremos 0 y 10 porque en ellos z_i y M_i son cero, por lo que no intervienen en el cálculo. Es conveniente observar que estos sumandos nulos se verían afectados por el factor $1/2$, mientras que en el resto la suma interviene completa.

Al operar de este modo, se convierte un sistema continuo en otro discreto, de modo que las integrales se transforman en sumatorios.

La incógnita H_1 se obtiene a partir del cociente entre las columnas sumadas, es decir:

$$H_1 = \frac{\sum_{10}}{\sum_{11}}$$

3.3. Arco parabólico biarticulado con inercia reducida constante y sometido a una carga uniforme según la cuerda.

La variación del momento de inercia viene dada por la relación:

$$\frac{I_0}{I \cdot \cos \alpha} = 1 \quad [3.17]$$

siendo I_0 , como ya se ha comentado, el momento de inercia de la sección en la clave. Esta relación indica que la sección disminuye de forma constante desde el arranque hasta la clave.

Este tipo de inercia, muy poco empleada en arcos biarticulados y bastante en arcos doblemente empotrados por su adaptación a los esfuerzos a que se ve sometido el arco, tiene la particularidad de simplificar mucho las expresiones matemáticas, lo que permite analizar factores que podrían permanecer diluidos entre la complejidad de las ecuaciones obtenidas.

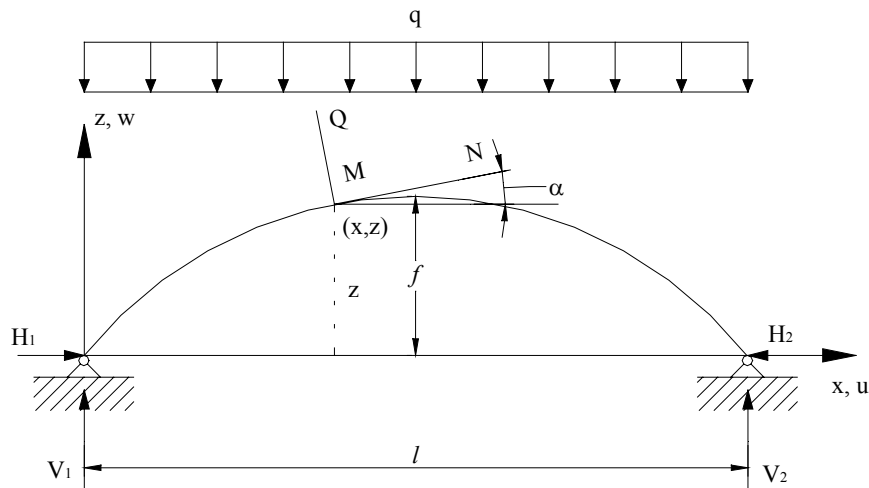


Figura 3.10. Arco biarticulado parabólico bajo carga uniforme.

Se va a estudiar la evolución del arco rebajado cuya flecha va aumentando hasta convertirse en peraltado, considerando las articulaciones a nivel para facilitar el análisis. Por tanto, se pretende comprobar la influencia que ejerce el esfuerzo normal N en la ecuación de deformación [3.16].

Si el arco está sometido a una carga uniforme (figura 3.10) y se pretende hacer que sea antifuncular de cargas, la ecuación de la directriz será:

$$z = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x \cdot (l - x) \quad [3.18]$$

El coeficiente δ_{11} , que depende sólo de la forma de la directriz y de las características elásticas del arco, si se desprecia la influencia del esfuerzo cortante, se calcula mediante la expresión:

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot A} \cdot ds + \int_0^s \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} \cdot ds \quad [3.19]$$

Bajo la acción de una carga $H_1 = 1$ se producen los esfuerzos N , \bar{N} , M y \bar{M} , cuyos valores son: $N = \bar{N} = -\cos \alpha$ y $M = \bar{M} = -z$, que sustituidos en la expresión [3.19], y tras multiplicar a ambos miembros de la igualdad por $E \cdot I_0$, se obtiene:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} = I_0 \cdot \int_0^s \frac{\cos^2 \alpha}{A} \cdot ds + \int_0^s \frac{I_0}{I} \cdot z^2 \cdot ds \quad [3.20]$$

Si se tienen en cuenta las relaciones entre ds , dx y dz dadas por [2.3] y la definida por la ley de inercia establecida, $\frac{I_0}{I \cdot \cos \alpha} = 1$, la expresión [3.20] se puede escribir:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} = I_0 \cdot \int_0^l \frac{\cos \alpha}{A} \cdot dx + \int_0^l z^2 \cdot dx$$

Si se introduce el área de la sección transversal en la clave A_0 y se coloca en primer lugar el término fundamental, se tiene:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} = \int_0^l z^2 \cdot dx + \frac{I_0}{A_0} \cdot \int_0^l \frac{A_0}{A} \cdot \cos \alpha \cdot dx$$

En esta expresión, el segundo término es un sumando correctivo, que en arcos rebajados está muy próximo a la unidad, por ser $\cos \alpha \cong 1$ y $\frac{A_0}{A} \cong 1$, por lo que al integrar se obtiene:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} = \int_0^l z^2 \cdot dx + \frac{I_0}{A_0} \cdot l$$

Esta ecuación es válida para cualquier forma que adopte la directriz. Si en ella se introduce la directriz parabólica definida por [3.18] se tiene:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} = \frac{16 \cdot f^2}{l^4} \cdot \int_0^l x^2 \cdot (l-x)^2 \cdot dx + \frac{I_0}{A_0} \cdot l = \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 + \frac{I_0}{A_0} \cdot l \quad [3.21]$$

Además, si se define un coeficiente ν de la forma:

$$\nu = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{I_0}{A_0} \quad [3.22]$$

la expresión [3.21] se escribe:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{11} = \frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 \cdot (1 + \nu) \quad [3.23]$$

Ahora se va a estudiar el coeficiente δ_{10} . En arcos rebajados, la componente normal N_i ocasionada por la carga es muy pequeña y su efecto despreciable comparado con la deformación producida por el momento M_i , por lo que si se multiplica δ_{10} por $E \cdot I_0$ para no alterar la ecuación de deformación, será:

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{10} = -\int_0^l M_i \cdot z \cdot dx$$

y teniendo en cuenta que

$$M_i = \frac{q}{2} \cdot x \cdot (l-x)$$

se obtiene, introduciendo además el valor de z definido en [3.18],

$$E \cdot I_0 \cdot \delta_{10} = -\frac{q}{2} \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot (l-x)^2 \cdot dx = -\frac{1}{15} \cdot q \cdot f \cdot l^3 \quad [3.24]$$

Por tanto, de [3.16], [3.21] y [3.24] se obtiene el valor del empuje H_1 :

$$H_1 = \frac{-\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{1}{15} \cdot q \cdot f \cdot l^3}{\frac{8}{15} \cdot l \cdot f^2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f \cdot (1 + \nu)} \quad [3.25]$$

Para tener una idea de la ley de momentos flectores basta obtener el momento en la clave M_0 , pues por ser la directriz parabólica, al igual que el polígono de presiones, todos los momentos son de igual signo, y el momento máximo será el citado M_0 (figura 3.11).

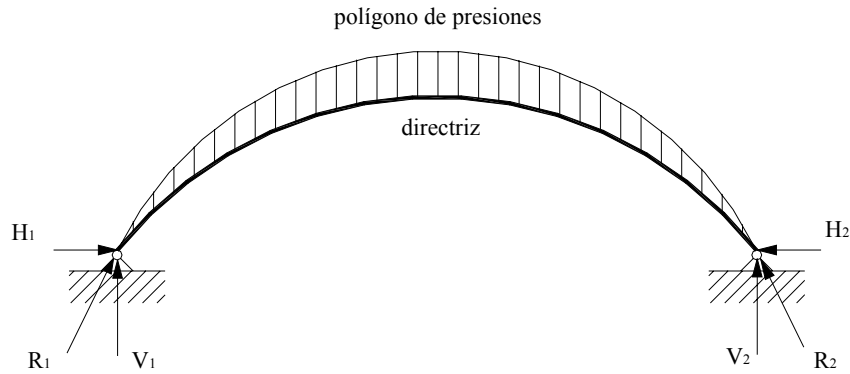


Figura 3.11. Polígono de presiones en un arco biarticulado rebajado.

H_1 viene definido por [3.25]. Al ser la carga vertical simétrica, la reacción vertical V_1 es la mitad de su valor, es decir, $\frac{q \cdot l}{2}$. Por tanto, el momento en clave M_0 es:

$$M_0 = M_{0i} - H_1 \cdot f = \frac{q \cdot l^2}{8} - \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot (1 + \nu)} = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{\nu}{(1 + \nu)} \quad [3.26]$$

Si en este punto se examina la transición de arco a viga, se tiene:

- Arco peraltado

Para visualizar de una manera más tangible el coeficiente ν definido en [3.22], se va a introducir en dicha expresión el concepto de radio de giro de la sección transversal de la clave i_0 , dado por:

$$i_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A_0}}$$

de forma que ν se puede escribir:

$$\nu = \frac{15}{8} \cdot \left(\frac{i_0}{f} \right)^2$$

En arcos peraltados la flecha es grande, mientras que el radio de giro siempre es una magnitud pequeña –basta analizar las unidades en las que se miden una y otra variable–, por lo que se puede tomar $\nu \cong 0$. De este modo, introduciendo este valor en las expresiones [3.25] y [3.26], se obtiene:

$$M_0 = 0$$

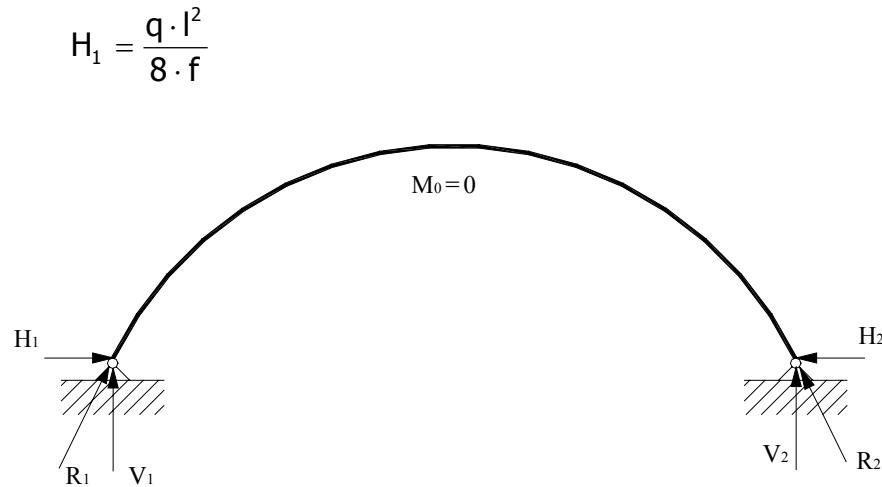


Figura 3.12. Línea de presiones en un arco peraltado.

lo que indica que el polígono de presiones coincide con la directriz, el arco trabaja sólo a compresión y las reacciones son tangentes a la directriz en los extremos.

- Arco rebajado

A medida que la flecha f disminuye, ν aumenta y el empuje H_1 , que debería tender a infinito al hacerse $f \rightarrow 0$, modera su crecimiento por la influencia del coeficiente ν .

$$H_1 = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f \cdot (1 + \nu)} \quad \begin{array}{l} f \rightarrow 0 \\ \nu \rightarrow \infty \end{array}$$

En cuanto a los momentos flectores, definidos en [3.26], van aumentando su importancia, pues al rebajarse el arco ν aumenta de 0 a ∞ , por lo que el cociente $\frac{\nu}{1 + \nu}$ crece de 0 a 1.

- Viga recta

Es el caso límite. Para comprobarlo, se va a introducir el valor del coeficiente ν dado en [3.22] en la expresión de H_1 [3.25], de modo que se tiene:

$$H_1 = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f \cdot (1 + \nu)} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f + 15 \cdot \frac{I_0}{A_0} \cdot \frac{1}{f}}$$

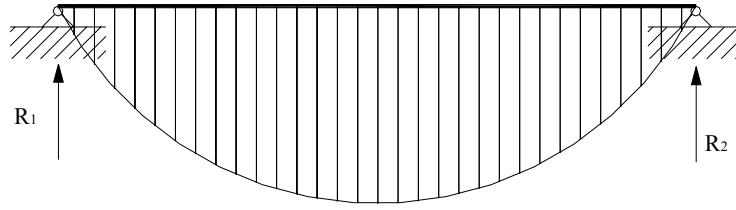


Figura 3.13. Momentos en una viga bajo carga uniforme.

Si se calcula el límite de esta expresión cuando $f \rightarrow 0$, se tiene

$$\lim_{f \rightarrow 0} H_1 = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f + 15 \cdot \frac{I_0}{A_0} \cdot \frac{1}{f}} = 0$$

Del mismo modo, si se calcula el límite de la expresión que determina el momento flector en la clave, se tiene:

$$\lim_{f \rightarrow 0} M_0 = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{\nu}{(1 + \nu)} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Estos resultados están de acuerdo con la teoría de vigas y constituyen una constatación de las ideas sobre el modo de trabajar de los arcos, pues se comprueba la influencia que el esfuerzo normal N y el acortamiento de la longitud de la directriz ejercen sobre la ley de momentos flectores.

3.4. Efecto de la temperatura.

Si se produce una variación uniforme de temperatura, el arco sufrirá dilataciones o contracciones que conviene tener en cuenta. Si la temperatura aumenta t grados, la viga isostática auxiliar, sin cargas, sufrirá una dilatación (desplazamiento hacia la izquierda) δ_{t0} (figura 3.14), que puede calcularse mediante el principio de los trabajos virtuales, haciendo actuar un empuje virtual $H_t=1$ que producirá una compresión virtual (figura 3.15), de valor $\bar{N}_t = \cos \alpha$.

Por tanto, el desplazamiento δ_{t0} viene dado por:

$$\delta_{t0} = -\int_0^s \bar{N}_t \alpha_t \cdot t \cdot ds = -\int_0^s \alpha_t \cdot t \cdot \cos \alpha \cdot ds = -\alpha_t \cdot t \cdot l$$

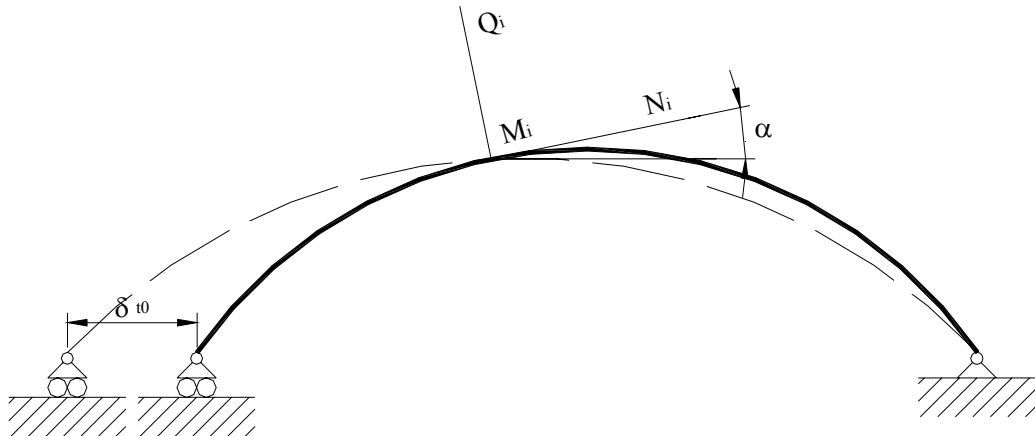
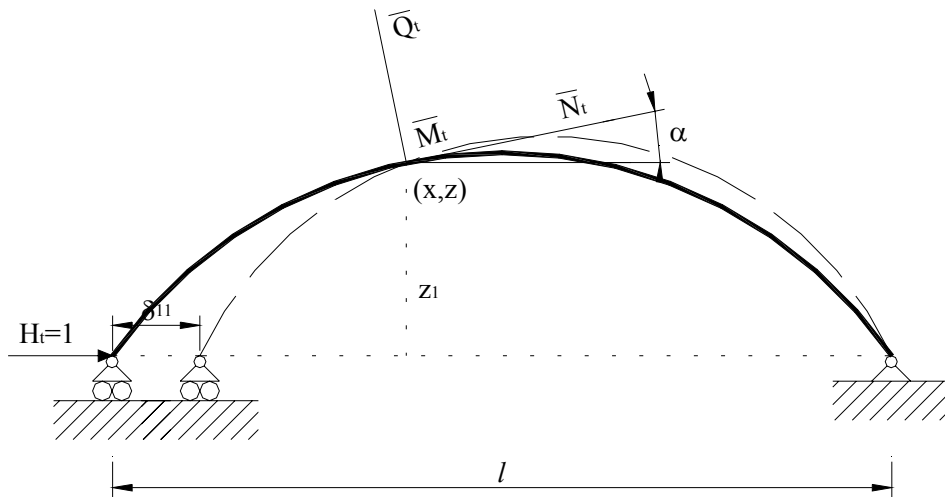


Figura 3.14. Efectos del aumento de temperatura.

Figura 3.15. Efectos del empuje virtual $H_t=1$.

El acortamiento δ_{11} ocasionado por H_t es:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \left(\int_0^l z^2 \cdot \frac{I_0}{I \cdot \cos \alpha} \cdot dx + \frac{l}{E \cdot A_0} \right)$$

para arco rebajado con directriz o inercia arbitrarias. La ecuación de deformación se obtendrá expresando que la dilatación debida al aumento de temperatura más el acortamiento debido a H_t es cero, es decir

$$\delta_{t0} + H_t \cdot \delta_{11} = 0$$

Así, de la ecuación de deformación se deduce el valor del empuje ocasionado por un aumento de temperatura de t grados, y es:

$$H_t = -\frac{\delta_{t0}}{\delta_{11}} = \frac{E \cdot I_0 \cdot \alpha_t \cdot t \cdot l}{\int_0^l z^2 \cdot \frac{I_0}{I \cdot \cos \alpha} \cdot dx + \frac{I_0}{A_0} \cdot l} \quad [3.27]$$

y como ley de momentos

$$M_t = -H_t \cdot z \quad [3.28]$$

Estos efectos se han de superponer a los ocasionados por las cargas, buscando siempre la combinación más desfavorable.

4. Arcos biempotrados.

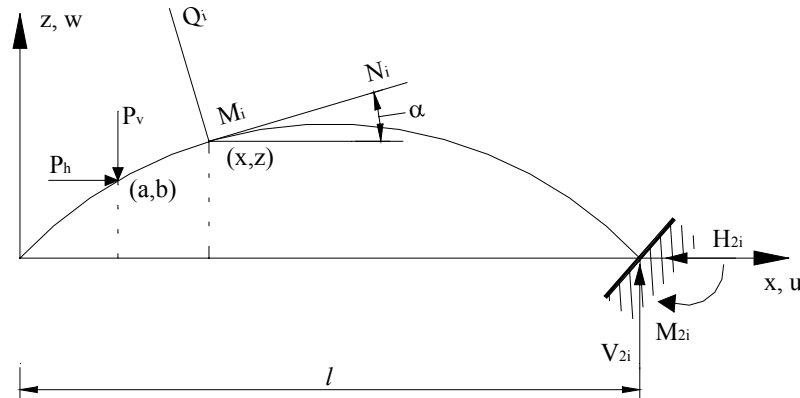


Figura 3.16. Arco en ménsula con arranques a nivel.

El arco biempotrado es una estructura hiperestática de tercer grado. El sistema isostático auxiliar elegido para su resolución es la pieza en ménsula cuyas reacciones hiperestáticas son las del suprimido empotramiento izquierdo H_1 , V_1 , M_1 . En la figura 3.16 se muestra un arco en voladizo con cargas arbitrarias y arranques a nivel, que servirá de base para el cálculo del arco hiperestático. Las ecuaciones de la Estática permiten obtener:

$$\begin{aligned} V_{2i} - \sum_0^s P_v &= 0 \\ -H_{2i} + \sum_0^s P_h &= 0 \\ M_{2i} = \sum_0^s P_v \cdot (l - a) - \sum_0^s P_h \cdot b &= 0 \end{aligned} \quad [3.29]$$

Si se denominan H_2 , V_2 , M_2 las reacciones de la extremidad derecha del arco doblemente empotrado, las ecuaciones de la Estática son:

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 - \sum_0^s P_v &= 0 \\
 H_1 - H_2 + \sum_0^s P_h &= 0 \\
 V_1 \cdot l + M_1 - \sum_0^s P_v \cdot (l - a) + \sum_0^s P_h \cdot b + M_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

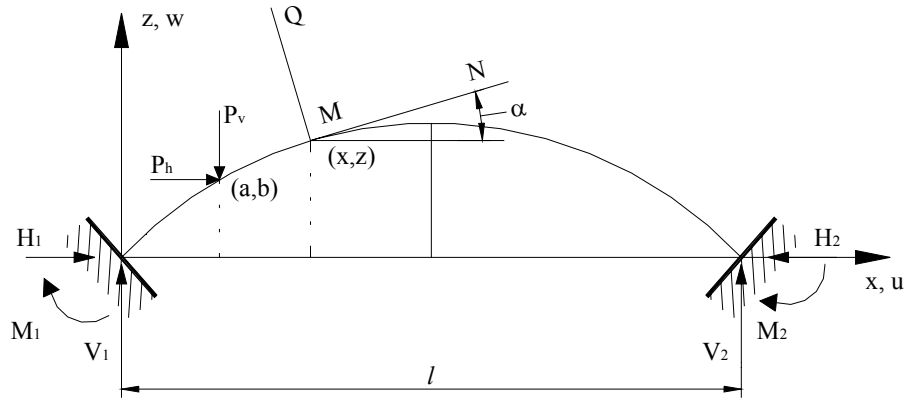


Figura 3.17. Arco biempotrado con arranques a nivel.

Las componentes M_i , N_i y Q_i del sistema de fuerzas a la izquierda de una sección (x, z) en el arco en ménsula valen:

$$\begin{aligned}
 M_i &= -\sum_0^x P_v \cdot (x - a) - \sum_0^x P_h \cdot (z - b) \\
 N_i &= -\sum_0^x P_v \cdot \sen \alpha + \sum_0^x P_h \cdot \cos \alpha \\
 Q_i &= -\sum_0^x P_v \cdot \cos \alpha - \sum_0^x P_h \cdot \sen \alpha
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Y en el arco biempotrado:

$$\begin{aligned}
 M &= V_1 \cdot x - H_1 \cdot z - \sum_0^x P_h \cdot (z - b) - \sum_0^x P_v \cdot (x - a) + M_1 \\
 N &= \left(V_1 - \sum_0^x P_v \right) \cdot \sen \alpha + \left(H_1 + \sum_0^x P_h \right) \cdot \cos \alpha \\
 Q &= \left(V_1 - \sum_0^x P_v \right) \cdot \cos \alpha - \left(H_1 + \sum_0^x P_h \right) \cdot \sen \alpha
 \end{aligned}$$

Si se dejan en función de M_i , N_i y Q_i definidas en [3.31], se tiene:

$$\begin{aligned}
M &= M_i + V_1 \cdot x - H_1 \cdot z + M_1 \\
N &= N_i + V_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha + H_1 \cdot \cos \alpha \\
Q &= Q_i + V_1 \cdot \cos \alpha - H_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

Al igual que en los arcos biarticulados, la expresión del trabajo o de la energía de deformación viene dada por la ecuación [3.8]. Si se desprecia el efecto del esfuerzo cortante y se superpone posteriormente el efecto de la temperatura, el valor de las incógnitas superabundantes H_1 , V_1 , M_1 es el que hace mínimo:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^s \frac{N^2}{E \cdot A} \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot \int_0^s \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot ds$$

Para derivar W respecto a H_1 , V_1 , M_1 es necesario derivar previamente M y N respecto a ellas:

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial M}{\partial H_1} = -z & \frac{\partial M}{\partial V_1} = x & \frac{\partial M}{\partial M_1} = 1 \\
\frac{\partial N}{\partial H_1} = \cos \alpha & \frac{\partial N}{\partial V_1} = \operatorname{sen} \alpha & \frac{\partial N}{\partial M_1} = 0
\end{array}$$

lo que permite escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial H_1} &= 0; \rightarrow \int_0^s \frac{N}{E \cdot A} \cdot \cos \alpha \cdot ds + \int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds = 0 \\
\frac{\partial W}{\partial V_1} &= 0; \rightarrow \int_0^s \frac{N}{E \cdot A} \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot ds - \int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds = 0 \\
\frac{\partial W}{\partial M_1} &= 0; \rightarrow \int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds = 0
\end{aligned}
\tag{3.33}$$

En realidad, este sistema de ecuaciones [3.33] contiene implícitamente a las tres incógnitas hiperestáticas, H_1 , V_1 y M_1 , incluidas en las definiciones de N y M , tal y como demuestran las expresiones [3.32].

Si se resuelve este sistema y se sustituyen sus valores en las ecuaciones [3.32], haciendo uso además de [3.31], se pueden calcular los momentos flectores, esfuerzos normales y cortantes en cualquier sección del arco, de modo que se pueda dimensionar correctamente.

Si se emplean arcos peraltados con una relación $\frac{f}{l}$ superior a 0.1, se puede despreciar la deformación ocasionada por los esfuerzos normales, por lo que el sistema [3.33] se puede escribir:

$$\begin{aligned}\int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds &= 0 \\ -\int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds &= 0 \\ \int_0^s \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds &= 0\end{aligned}\quad [3.34]$$

Si en [3.34] se sustituye M en función del momento isostático M_i , se tiene:

$$\begin{aligned}\int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds + V_1 \cdot \int_0^s \frac{x^2}{E \cdot I} \cdot ds - H_1 \cdot \int_0^s \frac{x \cdot z}{E \cdot I} \cdot ds + M_1 \cdot \int_0^s \frac{x}{E \cdot I} \cdot ds &= 0 \\ -\int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds - V_1 \cdot \int_0^s \frac{x^2}{E \cdot I} \cdot ds + H_1 \cdot \int_0^s \frac{z^2}{E \cdot I} \cdot ds - M_1 \cdot \int_0^s \frac{z}{E \cdot I} \cdot ds &= 0 \\ \int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot ds + V_1 \cdot \int_0^s \frac{x}{E \cdot I} \cdot ds - H_1 \cdot \int_0^s \frac{z}{E \cdot I} \cdot ds + M_1 \cdot \int_0^s \frac{1}{E \cdot I} \cdot ds &= 0\end{aligned}\quad [3.35]$$

Estas ecuaciones de flexibilidad [3.35] contienen una primera integral que hace referencia al efecto de la carga, mientras que las tres integrales siguientes tienen que ver con la forma y la ley de inercia de la sección elegida para el arco.

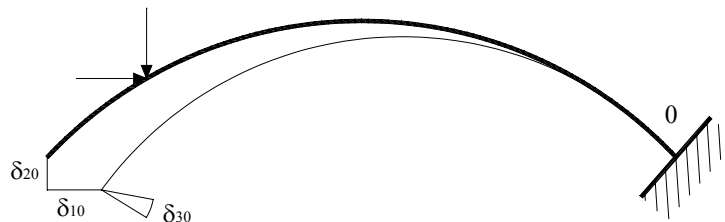


Figura 3.18. Deformación de un arco en voladizo ante cargas externas.

4.1. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación.

Para entender el significado físico de los coeficientes de las ecuaciones anteriores, se van a estudiar las componentes del recorrido y del giro experimentado por el extremo izquierdo de la pieza en ménsula solicitada

sucesivamente por las cargas y por acciones unidad actuando en dicho extremo.

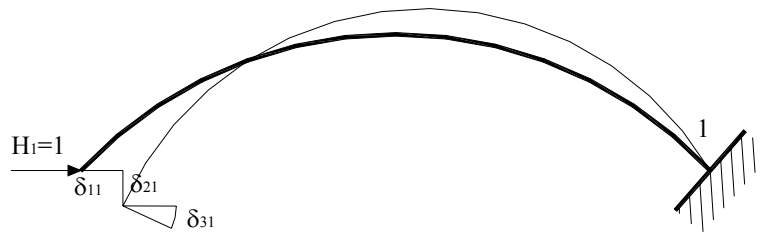


Figura 3.19. Deformación de un arco en voladizo ante un empuje horizontal H_1 unidad aplicado en el extremo libre.

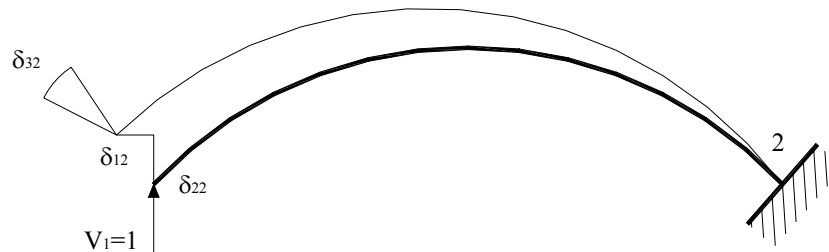


Figura 3.20. Deformación de un arco en voladizo ante un empuje vertical V_1 unidad aplicado en el extremo libre.

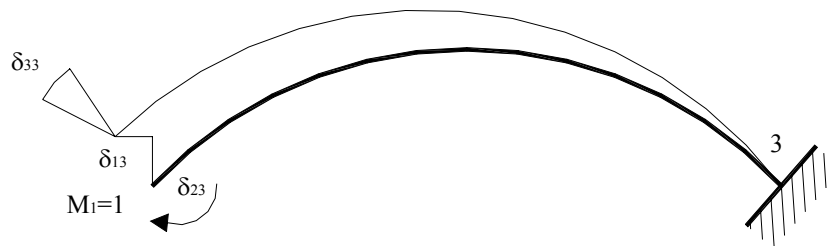


Figura 3.21. Deformación de un arco en voladizo ante un par M_1 unidad aplicado en el extremo libre.

Si se designa por δ_{jk} las deformaciones experimentadas por el extremo libre (corrimientos y giros), el subíndice j representa el tipo de desplazamiento, mientras que el subíndice k indica la causa deformadora. En las tablas 3.2 y 3.3 se recoge el significado de estos subíndices, así como el valor del momento virtual o momento real, para su aplicación en las expresiones siguientes.

Tabla 3.2. Significado del subíndice j y valor de \bar{M}		
J	Desplazamiento	\bar{M}
1	Recorrido horizontal	$\bar{M} = -z$
2	Recorrido vertical	$\bar{M} = x$
3	Giro	$\bar{M} = 1$

Tabla 3.3. Significado del subíndice k y valor de M		
k	Causa deformadora	M
0	Carga	$M=M_i$
1	$H_1=1$	$M=-z$
2	$V_1=1$	$M=x$
3	$M_1=1$	$M=1$

Así, para las cuatro sollicitaciones representadas en las figuras 3.18 a 3.21, los desplazamientos δ del borde libre se recogen en la tabla 3.4.

Tabla 3.4. Significado de δ_{jk}			
Solicitud	Recorridos		
	Horizontal	Vertical	Giro
Carga	δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}
$H_1=1$	δ_{11}	δ_{21}	δ_{31}
$V_1=1$	δ_{12}	δ_{22}	δ_{32}
$M_1=1$	δ_{13}	δ_{23}	δ_{33}

La expresión de los trabajos virtuales permite calcular los valores de δ_{jk} . A continuación se recogen únicamente los desplazamientos debidos al término principal de flexión.

$$\delta_{jk} = \int_0^s \frac{M_k \cdot \bar{M}_j}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$\begin{aligned}
\delta_{10} &= -\int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot z \cdot ds & \delta_{20} &= \int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot x \cdot ds & \delta_{30} &= \int_0^s \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot ds \\
\delta_{11} &= \int_0^s \frac{z^2}{E \cdot I} \cdot ds & \delta_{21} &= -\int_0^s \frac{x \cdot z}{E \cdot I} \cdot ds & \delta_{31} &= -\int_0^s \frac{z}{E \cdot I} \cdot ds \\
\delta_{12} &= -\int_0^s \frac{x \cdot z}{E \cdot I} \cdot ds & \delta_{22} &= \int_0^s \frac{x^2}{E \cdot I} \cdot ds & \delta_{32} &= \int_0^s \frac{x}{E \cdot I} \cdot ds \\
\delta_{13} &= -\int_0^s \frac{z}{E \cdot I} \cdot ds & \delta_{23} &= \int_0^s \frac{x}{E \cdot I} \cdot ds & \delta_{33} &= \int_0^s \frac{1}{E \cdot I} \cdot ds
\end{aligned}$$

Puede comprobarse cómo la matriz de flexibilidad $[\delta]$ es una matriz simétrica.

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de deformación se pueden escribir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial H_1} &= 0; \rightarrow \delta_{10} + H_1 \cdot \delta_{11} + V_1 \cdot \delta_{12} + M_1 \cdot \delta_{13} = 0 \\
\frac{\partial W}{\partial V_1} &= 0; \rightarrow \delta_{20} + H_1 \cdot \delta_{21} + V_1 \cdot \delta_{22} + M_1 \cdot \delta_{23} = 0 \\
\frac{\partial W}{\partial M_1} &= 0; \rightarrow \delta_{30} + H_1 \cdot \delta_{31} + V_1 \cdot \delta_{32} + M_1 \cdot \delta_{33} = 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

En estas expresiones, la primera ecuación $\left(\frac{\partial W}{\partial H_1}\right) = 0$ determina que el desplazamiento horizontal ha de ser nulo. La segunda ecuación $\left(\frac{\partial W}{\partial V_1}\right) = 0$, del mismo modo, indica que el desplazamiento vertical total también debe ser nulo, mientras que la tercera condición $\left(\frac{\partial W}{\partial M_1}\right) = 0$ se refiere a la existencia de giro nulo en la extremidad izquierda del arco.

Por tanto, estas ecuaciones [3.36], junto con el sistema [3.30], permiten calcular todas las incógnitas que representa el sistema hiperestático de tercer grado que es el arco biempotrado.

En forma matricial, el sistema [3.36] se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad [3.37]$$

4.2. Arco parabólico doblemente empotrado, con inercia reducida constante.

La primera solución racional del problema de los arcos de gran luz fue la directriz parabólica con proyección vertical constante del momento de inercia de las secciones. La sencillez de su trazado en la práctica y la facilidad con que se resuelven las integrales de los elementos de cálculo hizo de ella una solución clásica.

La variación de espesores que se da en una arco de este tipo se muestra en la tabla 3.5. En realidad esta ley de espesores no es muy lógica, pues aún en el caso de funicularidad, el aumento de sección desde la clave a los arranques, inversamente proporcional a la raíz cúbica del coseno del ángulo que define la sección, es mucho más lento que el aumento de las compresiones longitudinales entre dichas secciones, e inversamente proporcional al coseno de dicho ángulo (Fernández Casado, 1955).

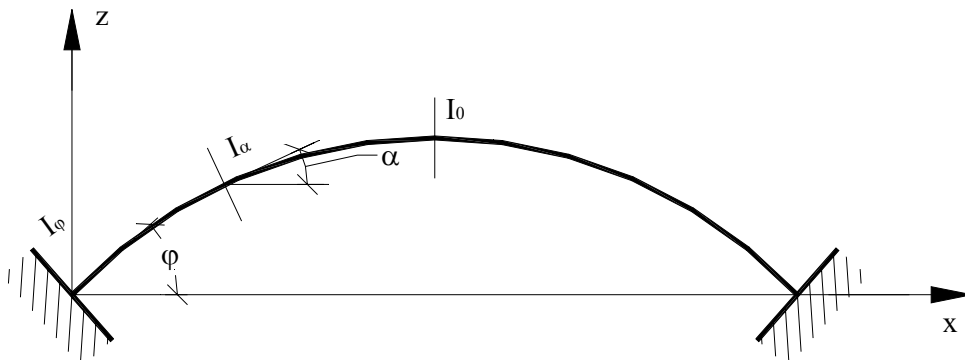


Figura 3.22. Arco parabólico biempotrado de inercia reducida constante: Secciones.

Tabla 3.5. Variación de inercia, sección y espesor en arcos parabólicos biempotrados de inercia reducida constante, para una sección rectangular y ancho constante.			
Sección	I	A	E
Clave	I_0	A_0	e_0
Intermedia	$\frac{I_0}{\cos \alpha}$	$\frac{A_0}{\sqrt[3]{\cos \alpha}}$	$\frac{e_0}{\sqrt[3]{\cos \alpha}}$
Arranques	$\frac{I_0}{\cos \varphi}$	$\frac{A_0}{\sqrt[3]{\cos \varphi}}$	$\frac{e_0}{\sqrt[3]{\cos \varphi}}$

Este caso se va a desarrollar obteniendo en primer lugar los coeficientes de flexibilidad para la ménsula isostática, y luego se va a determinar la matriz de rigidez $[K]$ por inversión de la matriz de flexibilidad $[\delta]$.

Por ser la inercia constante (ecuación [3.17]), se cumple que $\frac{1}{I} = \frac{\cos \alpha}{I_0}$.

Además, recuperando la condición [2.3], se puede escribir:

$$\frac{ds}{I} = \frac{dx}{I_0}$$

Con estas relaciones, e incorporando la definición de la directriz dada por [3.18], los coeficientes de flexibilidad son:

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{z^2}{E \cdot I} \cdot ds = \frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \int_0^l z^2 \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \frac{16 \cdot f^2}{l^4} \int_0^l x^2 \cdot (l-x)^2 \cdot dx = \frac{8}{15} \cdot \frac{f^2 \cdot l}{E \cdot I_0}$$

$$\begin{aligned} \delta_{21} = \delta_{12} &= -\int_0^s \frac{x \cdot z}{E \cdot I} \cdot ds = -\frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \int_0^l x \cdot z \cdot dx = -\frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot \int_0^l x^2 \cdot (l-x) \cdot dx = \\ &= -\frac{f \cdot l^2}{3 \cdot E \cdot I_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{31} = \delta_{13} &= -\int_0^s \frac{z}{E \cdot I} \cdot ds = -\frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \int_0^l z \cdot dx = -\frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot \int_0^l x \cdot (l-x) \cdot dx = \\ &= -\frac{2 \cdot f \cdot l}{3 \cdot E \cdot I_0} \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \int_0^s \frac{x^2}{E \cdot I} \cdot ds = \frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I_0}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int_0^s \frac{x}{E \cdot I} \cdot ds = \frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \int_0^l x \cdot dx = \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I_0}$$

$$\delta_{33} = \int_0^s \frac{1}{E \cdot I} \cdot ds = \frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \int_0^l dx = \frac{l}{E \cdot I_0}$$

La matriz de flexibilidad $[\delta]$ de la ménsula es:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \frac{8 \cdot f^2 \cdot l}{15 \cdot E \cdot I_0} & -\frac{f \cdot l^2}{3 \cdot E \cdot I_0} & -\frac{2 \cdot f \cdot l}{3 \cdot E \cdot I_0} \\ -\frac{f \cdot l^2}{3 \cdot E \cdot I_0} & \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I_0} & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I_0} \\ -\frac{2 \cdot f \cdot l}{3 \cdot E \cdot I_0} & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I_0} & \frac{l}{E \cdot I_0} \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez $[K]$, inversa de la anterior:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{45 \cdot E \cdot I_0}{4 \cdot f^2 \cdot l} & 0 & \frac{15 \cdot E \cdot I_0}{2 \cdot f \cdot l} \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_0}{l^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I_0}{l^2} \\ \frac{15 \cdot E \cdot I_0}{2 \cdot f \cdot l} & -\frac{6 \cdot E \cdot I_0}{l^2} & \frac{9 \cdot E \cdot I_0}{l} \end{bmatrix}$$

La interpretación de los coeficientes de rigidez en el caso de un arco parabólico de inercia reducida sin carga es la que sigue:

- Corrimiento horizontal δ_1 (figura 3.23)

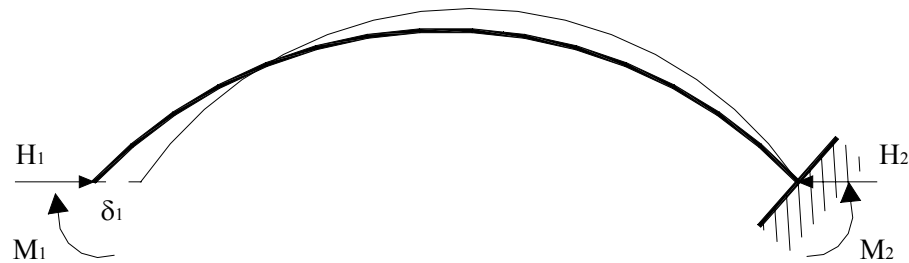


Figura 3.23. Reacciones para un desplazamiento horizontal δ_1

Las reacciones correspondientes son:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{45 \cdot E \cdot I_0}{4 \cdot f^2 \cdot l} \cdot \delta_1 \\ V_1 &= 0 \\ M_1 &= \frac{15 \cdot E \cdot I_0}{2 \cdot f \cdot l} \cdot \delta_1 \end{aligned}$$

De este modo, aplicando las ecuaciones de la Estática, se obtiene el valor de las reacciones H_2 , V_2 y M_2 . Así,

$$H_1 + H_2 = 0$$

$$V_1 + V_2 = 0$$

$$V_1 \cdot l + M_1 + M_2 = 0$$

Por lo que:

$$H_2 = -\frac{45 \cdot E \cdot I_0}{4 \cdot f^2 \cdot l} \cdot \delta_1$$

$$V_2 = 0$$

$$M_2 = -\frac{15 \cdot E \cdot I_0}{2 \cdot f \cdot l} \cdot \delta_1$$

- Desnivelación Δ_1 (figura 3.24)

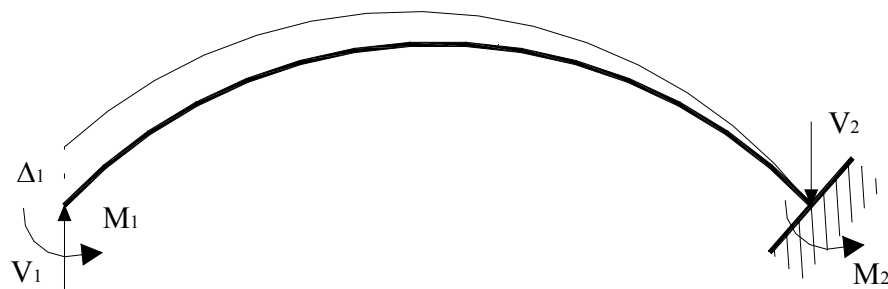


Figura 3.24. Reacciones para un desplazamiento vertical Δ_1

Las reacciones correspondientes son:

$$H_1 = 0$$

$$V_1 = \frac{12 \cdot E \cdot I_0}{l^3} \cdot \Delta_1$$

$$M_1 = -\frac{6 \cdot E \cdot I_0}{l^2} \cdot \Delta_1$$

Si de nuevo se aplican las ecuaciones de la Estática, se puede obtener el valor de las reacciones H_2 , V_2 y M_2 . Así,

$$H_1 + H_2 = 0$$

$$V_1 + V_2 = 0$$

$$V_1 \cdot l + M_1 + M_2 = 0$$

Por lo que:

$$H_2 = 0$$

$$V_2 = -\frac{12 \cdot E \cdot I_0}{l^3} \cdot \Delta_1$$

$$M_2 = -\frac{6 \cdot E \cdot I_0}{l^2} \cdot \Delta_1$$

- Giro θ_1 (figura 3.25)



Figura 3.25. Reacciones para un giro θ_1

Sus reacciones son:

$$H_1 = \frac{15 \cdot E \cdot I_0}{2 \cdot f \cdot l} \cdot \theta_1$$

$$V_1 = -\frac{6 \cdot E \cdot I_0}{l^2} \cdot \theta_1$$

$$M_1 = \frac{9 \cdot E \cdot I_0}{l} \cdot \theta_1$$

Recurriendo a las ecuaciones de la Estática, se obtiene el valor de las reacciones H_2 , V_2 y M_2 . Así,

$$V_1 + V_2 = 0$$

$$H_1 + H_2 = 0$$

$$V_1 \cdot l + M_1 + M_2 = 0$$

Por lo que:

$$H_2 = -\frac{15 \cdot E \cdot I_0}{2 \cdot f \cdot l} \cdot \theta_1$$

$$V_2 = \frac{6 \cdot E \cdot I_0}{l^2} \cdot \theta_1$$

$$M_2 = -\frac{3 \cdot E \cdot I_0}{l} \cdot \theta_1$$

Aunque en desuso a la hora del cálculo de estructuras en nuestros días, el método de Cross aún tiene gran importancia en la docencia de Resistencia de Materiales porque permite visualizar intuitivamente el comportamiento de estructuras hiperestáticas mediante sencillas operaciones matemáticas. Pues bien, este caso permite establecer los conceptos de rigidez y de factor de transmisión de un arco parabólico necesarios para el método creado por Hardy Cross. Así, la rigidez K_1 es la relación entre el momento aplicado M_1 y el giro producido θ_1 , y en cuanto al factor de transmisión β_{12} es la relación entre el momento reacción M_2 y el aplicado M_1 , de modo que:

$$K_1 = \frac{M_1}{\theta_1} = \frac{9 \cdot E \cdot I_0}{l}$$

$$\beta_{12} = \frac{M_2}{M_1} = -\frac{1}{3}$$

Siendo simétrico el arco, la rigidez en el extremo derecho K_2 y el factor de transmisión β_{21} serán:

$$K_2 = \frac{9 \cdot E \cdot I_0}{l}$$

$$\beta_{21} = -\frac{1}{3}$$

4.3. Efecto de la temperatura.

Como ya se ha sugerido con anterioridad, conviene estudiar por separado los efectos térmicos en el acero, aceptando un incremento de temperatura de unos 20°C como referencia, y casi siempre depreciando la diferencia de temperatura entre trasdós e intradós, por no ser significativa.

La variación de temperatura origina un alargamiento o acortamiento uniforme de la directriz. Supuesta la pieza sin cargas y sometida a una variación de temperaturas de t grados, refiriéndola a los ejes coordenados que pasan por el centro elástico (figura 3.26), se verificará en una sección genérica (x, z):

$$M = V_t \cdot x - H_t \cdot z + M_t$$

$$N = V_t \cdot \operatorname{sen} \alpha + H_t \cdot \cos \alpha$$

Por tanto,

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial M}{\partial V_t} = x & \frac{\partial M}{\partial H_t} = -z & \frac{\partial M}{\partial M_t} = 1 \\ \frac{\partial N}{\partial V_t} = \text{sen} \alpha & \frac{\partial N}{\partial H_t} = \cos \alpha & \frac{\partial N}{\partial M_t} = 0 \end{array}$$

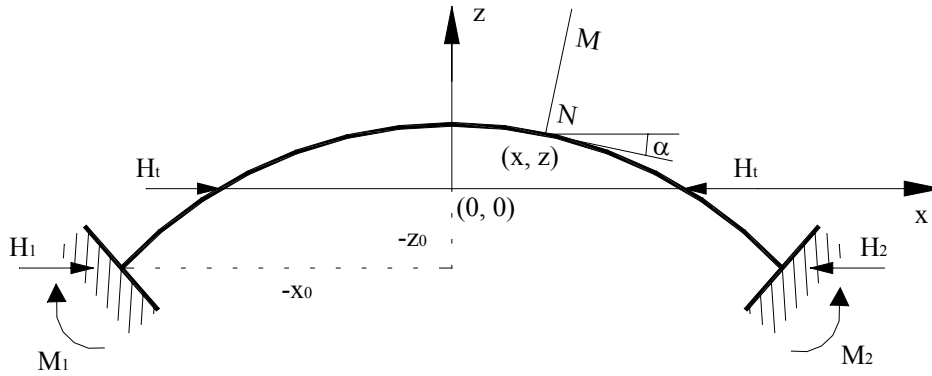


Figura 3.26. Ejes elásticos para el estudio del efecto de la temperatura

La expresión genérica del trabajo [3.8] reducida a sus tres términos más importantes, es:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^s \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot \int_0^s \frac{N^2}{E \cdot A} \cdot ds + \int_0^s N \cdot \alpha_t \cdot t \cdot ds$$

Las tres ecuaciones de deformación, con las simplificaciones debidas a los ejes de referencia, y multiplicadas por E , se escriben:

$$E \cdot \frac{\partial W}{\partial V_t} = \int_0^s \frac{M}{I} \cdot x \cdot ds + \int_0^s \frac{N}{A} \cdot \text{sen} \alpha \cdot ds + E \cdot \alpha_t \cdot t \cdot \int_0^s \text{sen} \alpha \cdot ds = 0$$

$$E \cdot \frac{\partial W}{\partial H_t} = -\int_0^s \frac{M}{I} \cdot z \cdot ds + \int_0^s \frac{N}{A} \cdot \cos \alpha \cdot ds + E \cdot \alpha_t \cdot t \cdot \int_0^s \cos \alpha \cdot ds = 0$$

$$E \cdot \frac{\partial W}{\partial M_t} = \int_0^s \frac{M}{I} \cdot ds = 0$$

Introduciendo las expresiones de M y N se obtiene:

$$V_t \cdot \int_0^s \frac{1}{I} \cdot x^2 \cdot ds + V_t \cdot \int_0^s \frac{1}{A} \cdot \sin^2 \alpha \cdot ds + H_t \cdot \int_0^s \frac{1}{A} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot ds + E \cdot \alpha_t \cdot t \cdot \int_0^s \sin \alpha \cdot ds = 0$$

$$H_t \cdot \int_0^s \frac{1}{I} \cdot z^2 \cdot ds + V_t \cdot \int_0^s \frac{1}{A} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot ds + H_t \cdot \int_0^s \frac{1}{A} \cdot \cos^2 \alpha \cdot ds + E \cdot \alpha_t \cdot t \cdot \int_0^s \cos \alpha \cdot ds = 0$$

$$M_t \cdot \int_0^s \frac{1}{I} \cdot ds = 0$$

Las integrales que contienen $\sin \alpha$ o $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ son nulas para arcos simétricos por tener igual valor y signos opuestos en cada par de puntos simétricos respecto al eje z . De aquí se deduce, con la simplificación aceptada para el segundo sumando de la primera ecuación:

$$H_t = \frac{E \cdot \alpha_t \cdot t \cdot l}{\int_0^s \frac{1}{I} \cdot z^2 \cdot ds + \frac{l}{A}}$$

$$V_t = 0$$

$$M_t = 0$$

Se puede comprobar que no se produce más reacción que un empuje H_t actuando en la horizontal que pasa por el centro elástico. Los momentos en los empotramientos son los correspondientes al traslado de ejes:

$$M_1 = H_t \cdot z_0$$

$$M_t = -H_t \cdot z_0$$

Capítulo 4.

Estudio de arcos por el método de elementos finitos: elementos de pórtico plano de Timoshenko.

1.	Discretización del arco con elementos de pórtico plano	99
2.	Teoría básica de la flexión de Timoshenko	101
2.1.	Campo de desplazamientos	103
2.2.	Campo de deformaciones	103
2.3.	Campo de tensiones	105
2.4.	Esfuerzos	106
2.5.	Principio de los trabajos virtuales	108
3.	Formulación de elementos finitos	109
3.1.	Discretización del campo de movimientos	109
3.1.1	Introducción.	109
3.1.2.	Elementos Lagrangianos	110
3.1.3.	Formulación isoparamétrica	112
3.1.4.	Campo de movimientos	114
3.2.	Discretización del campo de deformaciones generalizadas	115
3.3.	Obtención de la matriz de rigidez local	117
3.3.1.	Integración numérica	119
3.3.2.	Matriz de rigidez local	121
3.4.	El efecto de bloqueo por cortante	124
3.4.1.	Introducción	124
3.4.2.	Estudio del efecto de bloqueo por cortante	125
3.4.3.	Integración reducida	127
3.4.4.	Módulo de rigidez residual	128
3.5.	Transformación a ejes globales	135
3.6.	Ensamblaje de las ecuaciones	137
3.7.	Cálculo de deformaciones y esfuerzos	138

Capítulo 4.

Estudio de arcos por el método de elementos finitos: elementos de pórtico plano de Timoshenko.

1. Discretización del arco con elementos de pórtico plano.

Se considera un arco sometido a una serie de cargas en su plano medio (figura 4.1). La geometría del arco viene definida por la fibra media de las diferentes secciones.

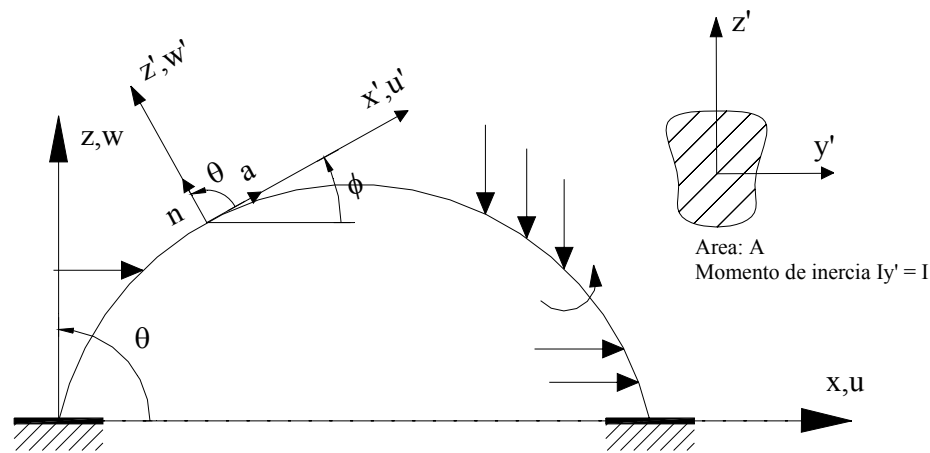


Figura 4.1. Geometría de un arco plano.

La obtención de las ecuaciones de un arco (equilibrio, constitutivas y cinemáticas) ya se ha realizado en capítulos precedentes.

Básicamente son dos las formas de afrontar el estudio de los arcos por el método de los elementos finitos. La más directa consiste en discretizar el arco en elementos curvos (Zhang, 1992a, b), método que se ha desarrollado fundamentalmente para arcos de directriz circular (Kikuchi, 1982; Loula y col., 1987; Zhang, 1995; Cheng y col. 1997).

La manera más sencilla de solventar las dificultades intrínsecas de la curvatura del eje consiste en estudiar el comportamiento de un arco como si estuviese compuesto de elementos rectos, de manera que la aproximación a la geometría real será tanto más exacta cuanto más pequeño sea el tamaño de la discretización utilizada. Esta idea ha sido corroborada mediante profundos estudios teóricos en arcos planos por Kikuchi (1975), Ciarlet (1978) y Bernadou y Ducatel (1982). En la figura 4.2 se pueden comprobar distintas aproximaciones a la geometría de un arco con elementos rectos. Así, en la figura 4.2 a) se realiza una discretización del arco con cuatro elementos, en b)

con seis y en c) con doce. En esta última prácticamente existe una coincidencia absoluta entre la geometría real y la línea poligonal constituida por la concatenación de los elementos rectos.

Se considera un arco de luz l , flecha f , sección transversal de área A y momento de inercia I , sobre el que actúan una serie de cargas verticales y momentos contenidos en el plano (figura 4.3). Además, se supone que el arco está discretizado en elementos rectos. Cada elemento tiene asociado unos ejes locales x' , z' definidos por su dimensión longitudinal (eje x'), y su normal tomada en sentido sinextrorsum (eje z').

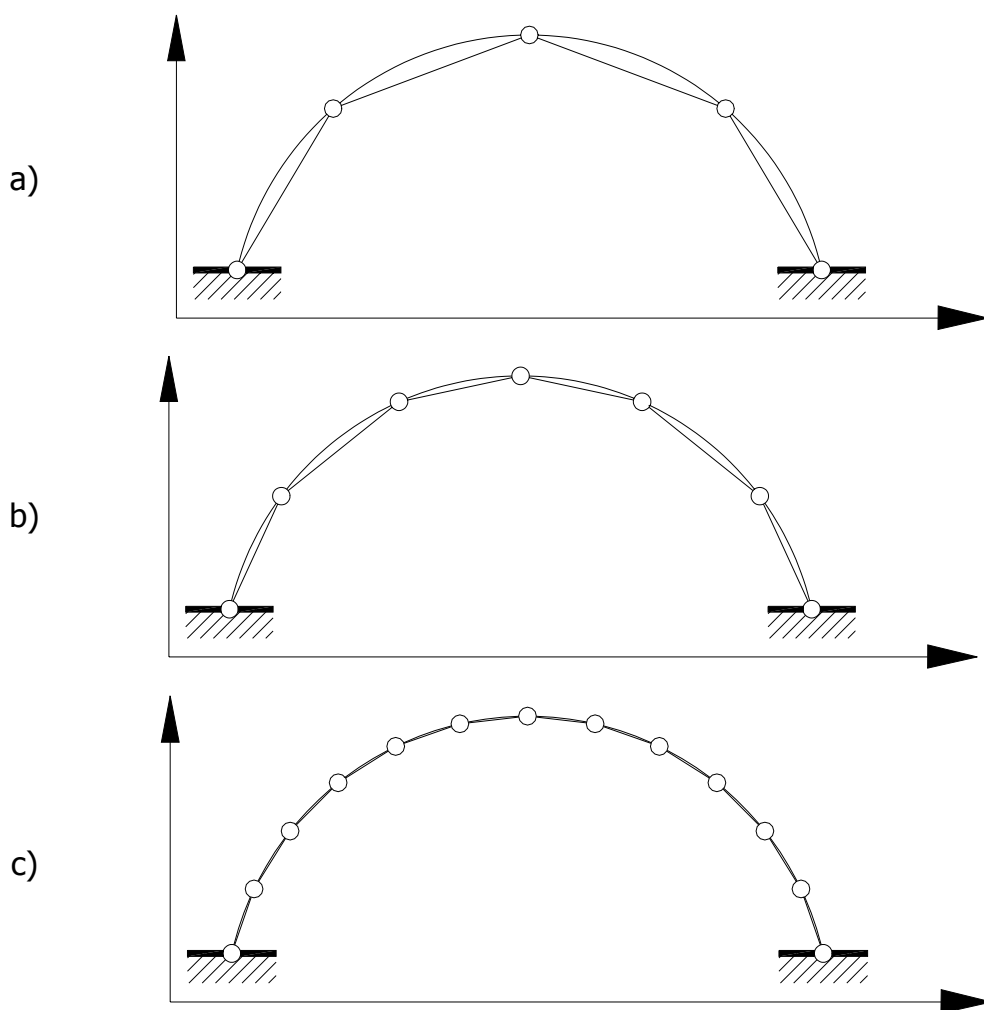


Figura 4.2. Aproximación a la geometría real de un arco con diferente número de elementos rectos.

Si se estudia la descomposición de una carga vertical (puntual o uniformemente repartida) referida a los ejes globales x , z , respecto a los ejes locales x' , z' de un elemento recto generado al discretizar el arco (figura 4.4), se puede comprobar que origina una carga axial (según el eje x') y una carga

transversal (según la dirección del eje z'). Estas componentes provocarán una situación mixta de flexión y compresión en el elemento.

Estos elementos rectos, en lo que sigue, se denominarán elementos de pórtico plano, por ser elementos contenidos en el plano de la estructura y estar solicitados a un esfuerzo axial de compresión, un momento flector y un esfuerzo cortante en cualquier sección transversal.

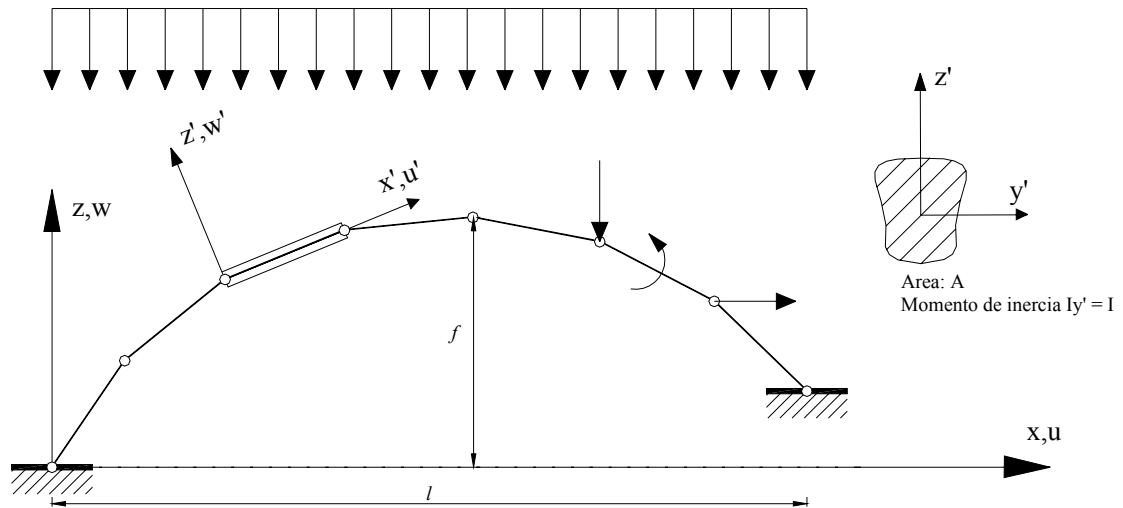


Figura 4.3. Discretización de un arco con elementos de pórtico plano.

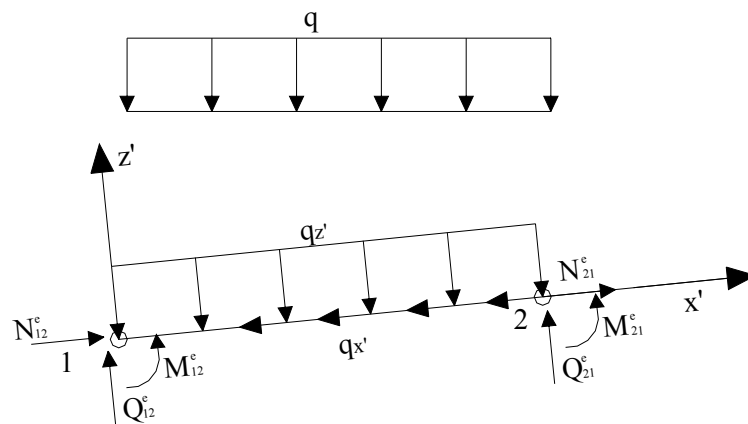


Figura 4.4. Descomposición de una carga vertical uniformemente repartida con respecto a los ejes locales del elemento 1-2.

2. Teoría básica de la flexión de Timoshenko.

La teoría de la flexión de vigas de Timoshenko se basa en las tres hipótesis siguientes (Timoshenko, 1989):

1. Los desplazamientos verticales (flechas) de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje del elemento x' .
2. El desplazamiento lateral (según el eje y' de la figura 4.1) es nulo.
3. Las secciones planas normales al eje del elemento antes de la deformación permanecen planas, pero no necesariamente normales al eje después de la deformación.

Esta tercera hipótesis incorpora una variación considerable respecto a la teoría clásica de Euler-Bernoulli, que determina que las secciones permanecen planas y normales al eje después de la deformación.

La hipótesis de Timoshenko representa una mayor aproximación a la deformación real en elementos solicitados a flexión de gran canto. A medida que la relación longitud/canto disminuye, las secciones transversales dejan de conservarse planas después de la deformación. Esta hipótesis supone tomar un giro medio para la sección, de manera que a efectos prácticos pueda seguir considerándose plana.

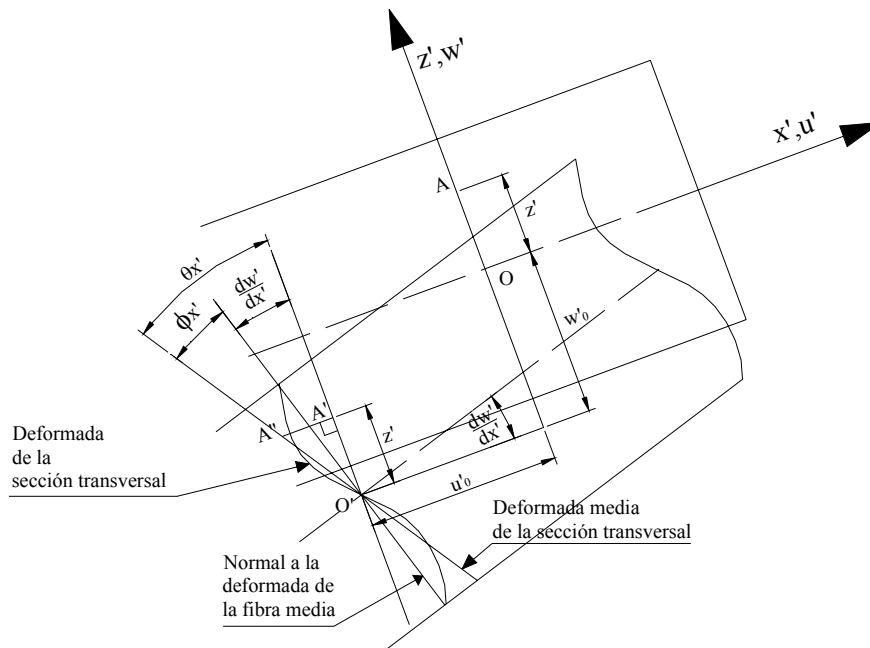


Figura 4.5. Deformación y giro de la sección normal a la fibra media de un elemento de pórtico plano, según la teoría de la flexión de Timoshenko.

De la figura 4.5 se deduce que el giro de la sección normal se puede expresar como:

$$\theta_{x'} = \frac{dw'_o}{dx'} + \phi_{x'} \quad [4.1]$$

donde $\frac{dw'_o}{dx'}$ es la pendiente de la deformada del eje del elemento y ϕ un giro adicional debido a la deformación por cortante.

2.1. Campo de desplazamientos.

Los desplazamientos de un punto genérico A, situado sobre la normal OA, siendo O el punto de corte de la normal con el eje del elemento lineal, se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} u'(x', z') &= -u'_o(x') - z' \cdot \theta_{x'}(x') \\ v'(x', z') &= 0 \\ w'(x', z') &= w'_o(x') \end{aligned} \quad [4.2]$$

donde u'_o y w'_o son los desplazamientos según los ejes x' y z' , respectivamente, del punto O; $\theta_{x'}$ es el giro de la normal OA contenido en el plano local $x'z'$, y z' es la distancia OA. El vector de movimientos del punto A se define como:

$$\{u'\} = \{u'_o, w'_o, \theta_{x'}\}^T \quad [4.3]$$

2.2. Campo de deformaciones.

Las deformaciones en un punto se obtienen por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{du'}{dx'} \\ \gamma_{x'z'} &= \frac{du'}{dz'} + \frac{dw'}{dx'} \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_{z'} = \gamma_{x'y'} = \gamma_{y'z'} = 0 \end{aligned} \quad [4.4]$$

Al derivar se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{du'}{dx'} &= -\frac{du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \\ \frac{du'}{dz'} &= -\theta_{x'} \\ \frac{dw'}{dx'} &= \frac{dw'_o}{dx'} \end{aligned} \quad [4.5]$$

Introduciendo las expresiones [4.5] en [4.4], y escribiéndolas en forma matricial, se tiene:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \\ \frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{du'_o}{dx'} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z' \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \\ \frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \end{Bmatrix} \quad [4.6]$$

o bien

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} -\varepsilon'_t \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z' \cdot \varepsilon'_f \\ \varepsilon'_c \end{Bmatrix} \quad [4.7]$$

donde

$$\{\varepsilon'_t\} = \left\{ \frac{du'_o}{dx'} \right\}^T \quad [4.8a]$$

$$\{\varepsilon'_f\} = \left\{ \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right\}^T \quad [4.8b]$$

$$\{\varepsilon'_c\} = \left\{ \frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right\}^T \quad [4.8c]$$

son los vectores¹ de deformaciones generalizadas (Zienkiewicz y Taylor, 2000a; Oñate, 2002; Felippa, 2001b) de tracción² (alargamientos/acortamientos), flexión (curvaturas) y cortante (cizalladuras).

De las ecuaciones [4.4] a [4.8] se deduce que:

- La deformación total de un punto se obtiene sumando las deformaciones de barra a las de viga, lo cual es consecuencia directa del campo de desplazamientos elegido.
- Los vectores de deformaciones generalizadas de barra y de cortante contienen las deformaciones longitudinales y transversales, respectivamente.
- El vector de deformaciones generalizadas de flexión contiene la curvatura del eje del elemento.

¹ Aunque en elementos de pórtico plano sean escalares, se mantiene la notación matricial para hacerla compatible y extensible a casos más generales.

² En toda la bibliografía consultada se refiere a este término como deformación de membrana, pero al analizarse los arcos planos como elementos unidimensionales, se ha considerado más oportuna esta denominación.

2.3. Campo de tensiones.

Operando en ejes locales, se tiene:

$$\sigma_{x'} = E \cdot \left(-\frac{du'_0}{dx'} - z' \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) \quad [4.9]$$

$$\tau_{x'z'} = G \cdot \gamma_{x'z'} = G \cdot \left(\frac{dw'_0}{dx'} - \theta_{x'} \right) \quad [4.10]$$

donde E es el módulo de elasticidad del material y G el módulo de rigidez, definido por:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad [4.11]$$

siendo ν el coeficiente de Poisson.

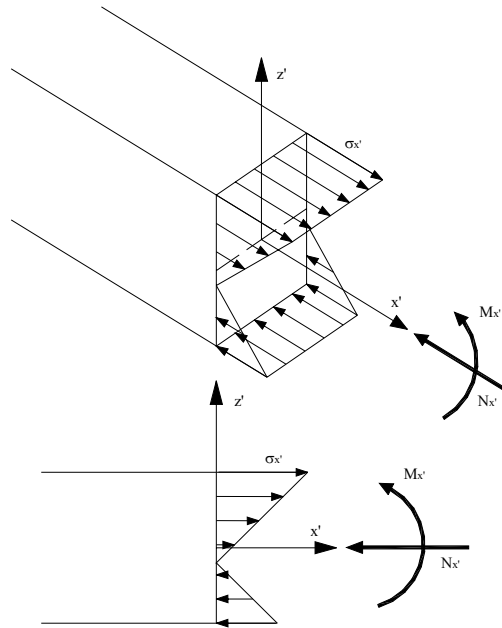


Figura 4.6. Distribución de tensiones normales. La distribución supuesta coincide con la distribución exacta.

Se puede comprobar que la variación de $\sigma_{x'}$ es lineal con el canto; $\frac{du'_0}{dx'}$ es constante para una sección dada y el segundo término del paréntesis es función lineal de z' . Esto se puede considerar como exacto dentro de la hipótesis de teoría de vigas (figura 4.6). Por el contrario, la variación de tensión

tangencial $\tau_{x'z'}$ con el canto se supone constante, lo que está en clara contradicción con la distribución polinómica de la teoría de vigas (figura 4.7).

Para hacer coincidir las hipótesis de Timoshenko con la teoría clásica, y teniendo en cuenta el planteamiento energético utilizado a partir del principio de los trabajos virtuales, se acepta la hipótesis de tensión tangencial constante, pero modificada por un coeficiente, de manera que el trabajo de deformación de la tensión tangencial constante coincida con el valor exacto de la teoría de vigas. Así, se toma:

$$\tau_{x'z'} = \alpha \cdot G \cdot \gamma_{x'z'} \quad [4.12]$$

donde α es el coeficiente de distorsión (Oñate, 2002) o de forma (Argüelles, 1996) de la sección. La primera manera de nombrar el coeficiente tiene en cuenta el efecto de que las secciones no se mantienen exactamente planas y presentan una distorsión longitudinal (figura 4.5).

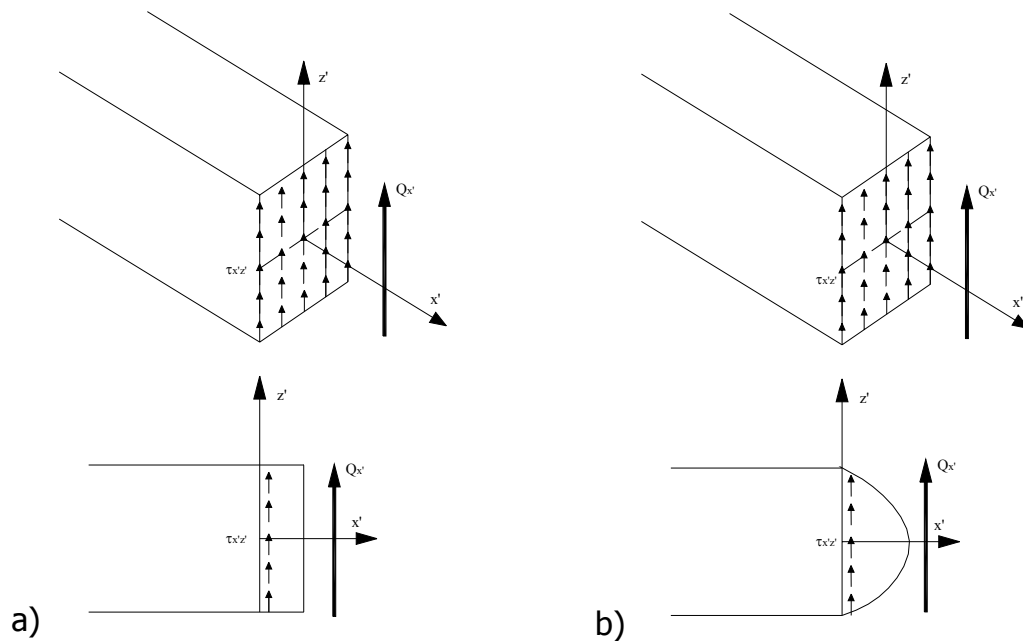


Figura 4.7. Distribución de tensiones tangenciales. La distribución a) es la distribución supuesta. En b) se muestra la distribución exacta.

2.4. Esfuerzos.

El esfuerzo normal, el momento flector y el esfuerzo cortante, en una sección cualquiera del elemento, se definen por:

$$\begin{aligned}
 N_{x'} &= \iint_A \sigma_{x'} \cdot dA = -\iint_A E \cdot \frac{du'_{,0}}{dx'} \cdot dA - \iint_A z' E \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \cdot dA \\
 M_{x'} &= -\iint_A z' \sigma_{x'} \cdot dA = \iint_A z' E \cdot \frac{du'_{,0}}{dx'} \cdot dA + \iint_A E \cdot (z')^2 \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \cdot dA \\
 Q_{x'} &= \iint_A \tau_{x'z'} \cdot dA = \alpha \cdot G \cdot A \cdot \left(\frac{dw'_{,0}}{dx'} - \theta_{x'} \right) = G \cdot A^* \cdot \gamma_{x'z'}
 \end{aligned} \quad [4.13]$$

donde $A^* = \alpha \cdot A$ es la sección reducida.

Si se tiene en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 \iint_A z' \cdot dA &= 0 \\
 \iint_A dA &= A \\
 \iint_A (z')^2 \cdot dA &= I
 \end{aligned} \quad [4.14]$$

las expresiones [4.13] se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned}
 N_{x'} &= -E \cdot A \cdot \frac{du'_{,0}}{dx'} \\
 M_{x'} &= E \cdot I \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} = E \cdot I \cdot \chi \\
 Q_{x'} &= \alpha \cdot G \cdot A \cdot \left(\frac{dw'_{,0}}{dx'} - \theta_{x'} \right)
 \end{aligned} \quad [4.15]$$

donde $\chi = \frac{d\theta_{x'}}{dx'}$ es la curvatura del eje del elemento.

En las solicitaciones que actúan sobre una sección transversal del arco, el signo negativo del esfuerzo normal corresponde a una carga de compresión. Conociendo este efecto, se va a prescindir del signo en lo que sigue.

En forma matricial, el vector de esfuerzos locales, designado así por Zienkiewicz y Taylor (2000a) y Oñate (2002), se define en el centro de la sección transversal por:

$$\{\sigma'\} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ M_{x'} \\ Q_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 & 0 \\ 0 & E \cdot I & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot A^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon'_t \\ \varepsilon'_f \\ \varepsilon'_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_t \\ \sigma'_f \\ \sigma'_c \end{Bmatrix} = [D'] \cdot \{\varepsilon'\} \quad [4.16]$$

donde σ'_t , σ'_f y σ'_c son los esfuerzos locales de tracción, flexión y cortante, respectivamente, y $[D']$ la matriz constitutiva del elemento.

2.5. Principio de los trabajos virtuales.

Sea el arco de la figura 4.3. Las componentes de las fuerzas verticales (puntuales y uniformemente repartidas) según los ejes locales del elemento tienen sentidos negativos, mientras que las componentes de las fuerzas puntuales horizontales originan cargas puntuales positivas en el sentido x' y negativas en el z' . Del mismo modo, los momentos exteriores son positivos al coincidir su sentido con el positivo de giro.

$$\begin{aligned} \iiint_V (\delta \varepsilon_{x'} \cdot \sigma_{x'} + \delta \gamma_{x'z'} \cdot \tau_{x'z'}) \cdot dV = & - \int_0^l \delta u' \cdot q_{x'} \cdot dx' - \int_0^l \delta w' \cdot q_{z'} \cdot dx' \\ & - \sum_{i=1}^p \delta u'_i \cdot X'_i - \sum_{j=1}^q \delta w'_j \cdot Z'_j + \sum_{k=1}^m \delta \theta'_k \cdot M'_k \end{aligned} \quad [4.17]$$

Haciendo uso de las expresiones [4.9] a [4.12], el primer miembro de [4.17] se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \iiint_V (\delta \varepsilon_{x'} \cdot \sigma_{x'} + \delta \gamma_{x'z'} \cdot \tau_{x'z'}) \cdot dV = \\ \iiint_V \left[\delta \left(\frac{-du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) \cdot E \cdot \left(\frac{-du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) + \delta \left(\frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right) \cdot \alpha \cdot G \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right) \right] \cdot dV = \\ = \int_0^l \left[\delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot \iint_A E \cdot \frac{du'_o}{dx'} \cdot dA + \delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot E \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \cdot \iint_A z' \cdot dA + \delta \left(\frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) \cdot \frac{du'_o}{dx'} \cdot \iint_A z' \cdot dA + \right. \\ \left. \delta \left(\frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) \cdot E \cdot \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \cdot \iint_A (z')^2 \cdot dA + \delta \left(\frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right) \cdot \alpha \cdot G \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right) \cdot \iint_A dA \right] \cdot dx' = \\ = \int_0^l \left[\delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot N_{x'} + \delta \left(\frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) \cdot M_{x'} + \delta \left(\frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right) \cdot Q_{x'} \right] \cdot dx' \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales [4.17] se puede enunciar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot EA \cdot \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) + \delta \left(\frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) \cdot EI \cdot \left(\frac{d\theta_{x'}}{dx'} \right) + \delta \left(\frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right) \cdot \alpha GA \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \right) \right] \cdot dx' = \\ - \int_0^l \delta u' \cdot q_{x'} \cdot dx' - \int_0^l \delta w' \cdot q_{z'} \cdot dx' - \sum_{i=1}^p \delta u'_i \cdot X'_i - \sum_{j=1}^q \delta w'_j \cdot Z'_j + \sum_{k=1}^m \delta \theta'_k \cdot M'_k \end{aligned} \quad [4.18]$$

En esta expresión se aprecia que en el integrando aparecen únicamente derivadas primeras del desplazamiento longitudinal, de la flecha y el giro. Esto exige únicamente su continuidad para garantizar la integrabilidad, lo que permite la utilización de elementos finitos de clase C_0 .

3. Formulación de elementos finitos.

3.1. Discretización del campo de movimientos.

3.1.1. Introducción.

Timoshenko (1989) demostró que el problema de obtener la configuración de equilibrio de una barra cargada bajo la acción de fuerzas exteriores se reduce a encontrar un campo de desplazamientos que satisfaga [4.18] y las condiciones de contorno sobre los desplazamientos prescritos (condiciones cinemáticas).

La solución aproximada a este problema por el método de elementos finitos consiste en encontrar un campo de desplazamientos alternativo que cumpla ambas restricciones: la ecuación [4.18] del principio de los trabajos virtuales y las condiciones cinemáticas.

Al emplear elementos de pórtico plano con dos nodos, la aproximación más sencilla al campo de desplazamientos que se puede elegir es la función polinómica:

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x \quad [4.19]$$

Genéricamente, para un elemento de n nodos,

$$u(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad [4.20]$$

donde los valores a_i son constantes que dependen únicamente del valor del desplazamiento $u(x)$ en los nodos.

En la práctica es más común escribir [4.19] como:

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2 \quad [4.21]$$

donde N_i son las funciones de interpolación polinómicas definidas en el dominio del elemento, y que se denominan funciones de forma, y u_i es el valor del desplazamiento en el nodo i . Cada función de forma vale la unidad en el nodo i y cero en el resto de los nodos.

Esta interpolación polinómica garantiza que el desplazamiento es continuo dentro del elemento y entre elementos. Los elementos que satisfacen dichos requisitos de continuidad se denominan de clase C_0 . En general, se dice que un elemento es de clase C_m si su campo de desplazamientos tiene continuas las m primeras derivadas.

La sustitución de la expresión aproximada de $u(x)$ en la expresión del principio de los trabajos virtuales permite obtener las ecuaciones algebraicas de equilibrio de la estructura discretizada en función de los nodos de la malla de elementos finitos.

3.1.2. Elementos Lagrangianos.

En un elemento unidimensional de dos nodos la aproximación polinómica de una variable $u(x)$ queda definida por la expresión [4.19]. Para calcular las constantes a_0, a_1 se necesitan dos condiciones, una condición por cada nodo. Para un elemento lineal de longitud $l^{(e)}$, con el nodo 1 en $x=x_1$ y el nodo 2 en $x=x_2$ (figura 4.8), se tiene:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u_1 = a_0 + a_1 \cdot x_1 \\ u(x_2) &= u_2 = a_0 + a_1 \cdot x_2 \end{aligned} \quad [4.22]$$

donde u_1 y u_2 son los valores del desplazamiento axial en los nodos. De este modo se pueden despejar los valores de las constantes a_0 y a_1 .

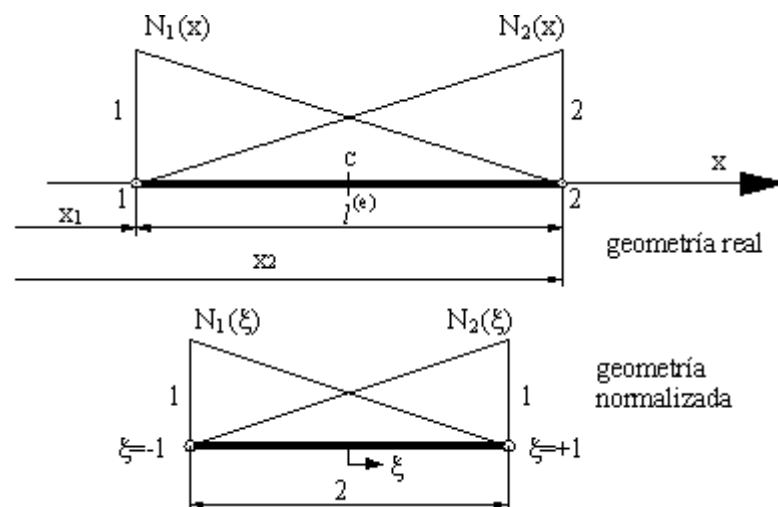


Figura 4.8. Definición del sistema de coordenadas natural. Geometría real y normalizada del elemento.

Si en lugar de [4.19] se hubiese utilizado la expresión de la aproximación polinómica [4.21], el valor de las funciones de forma $N_1(x)$ y $N_2(x)$ coincidiría con el de las constantes a_0 y a_1 . Así:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{(x_2 - x)}{l^{(e)}} \\ N_2(x) &= \frac{(x - x_1)}{l^{(e)}} \end{aligned} \quad [4.23]$$

Como se puede vislumbrar, el problema de la obtención de las funciones de forma se complica al incrementarse el número de nodos. Para evitar la resolución innecesaria de sistemas de ecuaciones, se pueden utilizar los polinomios de Lagrange para conseguir las funciones de forma de elementos unidimensionales de clase C_0 . Estos polinomios toman un valor determinado en un punto y cero en un conjunto de puntos prefijados (Ralston, 1970; Luthe y col., 1984). Por tanto, normalizando dicho valor a la unidad y haciendo coincidir los puntos con la posición de los nodos, las funciones de forma se identifican con los polinomios de Lagrange, por lo que a estos elementos se les denomina Lagrangianos.

La función de forma del nodo i de un elemento Lagrangiano unidimensional de n nodos se obtiene de la expresión general:

$$N_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} \quad [4.24]$$

o, de manera abreviada:

$$N_i(x) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad [4.25]$$

Así, para un elemento de dos nodos, las expresiones que se obtienen son:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(x_2 - x)}{l^{(e)}} \\ N_2(x) &= \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x - x_1)}{l^{(e)}} \end{aligned}$$

coincidentes con [4.23].

En el método de elementos finitos es común la utilización del sistema de coordenadas natural o normalizado basado en la variable ξ (figura 4.8), que se define como:

$$\xi = 2 \cdot \frac{x - x_c}{l^{(e)}} \quad [4.26]$$

siendo x_c la coordenada del centro del elemento, de manera que:

$\xi = -1$ en el nodo izquierdo del elemento

$\xi = 0$ en el punto central del elemento

$\xi = 1$ en el nodo derecho del elemento.

La ecuación [4.26] transforma la geometría real del elemento en una geometría normalizada en la que la longitud del elemento es 2.

Las funciones de forma, expresadas en coordenadas naturales, quedan definidas por:

$$N_i(\xi) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad [4.27]$$

3.1.3. Formulación isoparamétrica.

Para un elemento lineal de dos nodos, el desplazamiento axial en un punto, en coordenadas naturales, se expresa por:

$$u(\xi) = N_1(\xi) \cdot u_1 + N_2(\xi) \cdot u_2 \quad [4.28]$$

La deformación longitudinal ε se obtiene como:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1(\xi)}{dx} \cdot u_1 + \frac{dN_2(\xi)}{dx} \cdot u_2 \quad [4.29]$$

Se puede comprobar que es necesario conocer las derivadas de las funciones de forma con respecto a la coordenada cartesiana x , cálculo que sería inmediato si las funciones de forma se expresaran en función de x . Como lo habitual es emplear coordenadas naturales, será necesario operar como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1(\xi)}{dx} &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \\ \frac{dN_2(\xi)}{dx} &= \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}\end{aligned}\quad [4.30]$$

En primer lugar se determinan las funciones de forma de un elemento Lagrangiano de dos nodos, a partir de [4.27]:

$$\begin{aligned}N_1(\xi) &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi)\end{aligned}\quad [4.31]$$

Por tanto, [4.30] se puede escribir así:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1(\xi)}{dx} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{d\xi}{dx} \\ \frac{dN_2(\xi)}{dx} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d\xi}{dx}\end{aligned}\quad [4.32]$$

Para completar el cálculo es necesario evaluar $\frac{d\xi}{dx}$, lo que exige conocer una relación explícita entre x y ξ , que se consigue mediante una interpolación de la geometría del elemento. Este concepto fue introducido por Taig (1961) y desarrollado posteriormente por Irons (1966).

En general, si se conocen las coordenadas de m puntos cualesquiera del elemento, se puede calcular la coordenada de cualquier punto interpolando los valores de las coordenadas conocidas. Esta interpolación puede escribirse:

$$x(\xi) = N_1^*(\xi) \cdot x_1 + N_2^*(\xi) \cdot x_2 + \dots + N_m^*(\xi) \cdot x_m \quad [4.33]$$

$N_i^*(\xi)$ son funciones de interpolación de la geometría, que satisfacen las mismas condiciones que las funciones de forma utilizadas para interpolar el campo de desplazamientos, es decir, toman el valor unidad en el punto i y cero en el resto de los $m-1$ puntos.

Estos puntos empleados en la interpolación geométrica pueden ser o no coincidentes con los nodos utilizados en la interpolación del campo de desplazamientos, pues dependerá de la complejidad de la geometría. Si existe coincidencia entre el número de puntos y nodos, la formulación recibe el nombre de isoparamétrica, que es la de mayor desarrollo en la práctica. Si el

número de puntos supera al de nodos, la formulación es superparamétrica, mientras que si el número de puntos de geometría es inferior al de nodos, la formulación recibe el nombre de subparamétrica.

3.1.4. Campo de movimientos.

Consideremos un elemento de pórtico plano isoparamétrico de dos nodos (figura 4.9). Al utilizar la teoría de Timoshenko, y a diferencia de lo que sucede al aplicar los postulados de Euler-Bernoulli, el desplazamiento u_o , la flecha w_o y el giro θ son variables independientes, y de continuidad C_0 . Así, se puede comenzar la secuencia del método de los elementos finitos interpolando por separado cada una de las variables del siguiente modo:

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= N_1(\xi) \cdot u'_{o1} + N_2(\xi) \cdot u'_{o2} \\ w'(\xi) &= N_1(\xi) \cdot w'_{o1} + N_2(\xi) \cdot w'_{o2} \\ \theta'(\xi) &= N_1(\xi) \cdot \theta'_1 + N_2(\xi) \cdot \theta'_2 \end{aligned} \quad [4.34]$$

donde u'_{o1} , w'_{o1} , θ'_1 y u'_{o2} , w'_{o2} , θ'_2 son los desplazamientos, flechas y giros de los nodos 1 y 2 del elemento, respectivamente, referidos a los ejes locales, y $N_1(\xi)$ y $N_2(\xi)$ son las funciones de forma lineales definidas en [4.30].

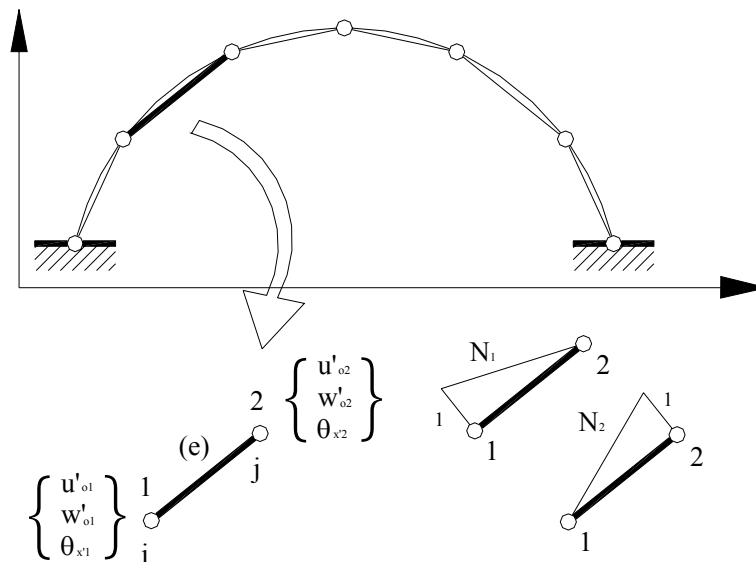


Figura 4.9. Elemento de pórtico plano de dos nodos. Interpolación de los movimientos y funciones de forma.

En forma matricial:

$$\{u'\} = \sum_{i=1}^2 [N_i] \cdot \{a_i^{(e)}\} = [[N_1][N_2]] \cdot \left\{ \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{Bmatrix} \right\} = [N] \cdot \{a^{(e)}\} \quad [4.35]$$

donde

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad [4.36]$$

$$\{a_i^{(e)}\} = \{u'_{oi}, w'_{oi}, \theta_{x'i}\}^T$$

son la matriz de funciones de forma y el vector de movimientos locales de un nodo i del elemento, respectivamente. Se puede comprobar que los movimientos nodales incluyen el desplazamiento longitudinal u'_{oi} , el desplazamiento transversal w'_{oi} y el giro local $\theta_{x'i}$.

3.2. Discretización del campo de deformaciones generalizadas.

Como se ha recogido en las expresiones [4.8], el campo de deformaciones generalizadas se puede escribir como:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_t \\ \varepsilon'_f \\ \varepsilon'_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du'_o}{dx'} \\ \frac{d\theta_{x'}}{dx'} \\ \frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} \end{Bmatrix} \quad [4.37]$$

Al realizarse la interpolación del campo de movimientos nodales en coordenadas naturales es necesario la derivación en cadena, como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{du'_o}{dx'} &= \frac{du'_o}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx'} = \frac{d\xi}{dx'} \cdot \left(\frac{dN_1}{d\xi} \cdot u'_{o1} + \frac{dN_2}{d\xi} \cdot u'_{o2} \right) \\ \frac{d\theta_{x'}}{dx'} &= \frac{d\theta_{x'}}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx'} = \frac{d\xi}{dx'} \cdot \left(\frac{dN_1}{d\xi} \cdot \theta_{x'1} + \frac{dN_2}{d\xi} \cdot \theta_{x'2} \right) \\ \frac{dw'_o}{dx'} - \theta_{x'} &= \frac{dw'_o}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx'} - \theta_{x'} = \frac{d\xi}{dx'} \cdot \left(\frac{dN_1}{d\xi} \cdot w'_{o1} + \frac{dN_2}{d\xi} \cdot w'_{o2} \right) - (N_1 \cdot \theta_{x'1} + N_2 \cdot \theta_{x'2}) \end{aligned} \quad [4.38]$$

En estas expresiones, $\frac{d\xi}{dx'} = \frac{1}{|J^{(e)}|}$, donde $|J^{(e)}|$ es el determinante jacobiano del elemento, que en su forma general en el espacio tridimensional vale:

$$|J^{(e)}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

De este modo, y manteniendo la formulación matricial, el vector de deformaciones generalizadas puede escribirse:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_t \\ \varepsilon'_f \\ \varepsilon'_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B'_t] \\ [B'_f] \\ [B'_c] \end{bmatrix} \cdot \{a^{(e)}\} = [B'] \cdot \{a^{(e)}\} \quad [4.39]$$

donde $[B'_t]$, $[B'_f]$ y $[B'_c]$ son las matrices de deformación de tracción, flexión y cortante, quedando definidas por las expresiones:

$$\begin{aligned} [B'_t] &= \left[\frac{1}{|J^{(e)}|} \cdot \frac{dN_1}{d\xi} \quad 0 \quad 0 \mid \frac{1}{|J^{(e)}|} \cdot \frac{dN_2}{d\xi} \quad 0 \quad 0 \right] \\ [B'_f] &= \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{|J^{(e)}|} \cdot \frac{dN_1}{d\xi} \mid 0 \quad 0 \quad \frac{1}{|J^{(e)}|} \cdot \frac{dN_2}{d\xi} \right] \\ [B'_c] &= \left[0 \quad \frac{1}{|J^{(e)}|} \cdot \frac{dN_1}{d\xi} \quad -N_1 \mid 0 \quad \frac{1}{|J^{(e)}|} \cdot \frac{dN_2}{d\xi} \quad -N_2 \right] \\ \{a^{(e)}\} &= \{u'_{o1} \quad w'_{o1} \quad \theta_{x'1} \mid u'_{o2} \quad w'_{o2} \quad \theta_{x'02}\}^T \end{aligned} \quad [4.40]$$

Al tener en cuenta la definición de la variable ξ , recogida en la ecuación [4.26], se obtiene:

$$\frac{d\xi}{dx'} = \frac{2}{l^{(e)}} \quad [4.41]$$

y con las funciones de forma descritas en [4.31], todas las matrices de deformación de [4.40] se convierten en:

$$\begin{aligned}
[B'_t] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{-1}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} & 0 & 0 \end{array} \right] \\
[B'_f] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{-1}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} \end{array} \right] \\
[B'_c] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{-1}{l^{(e)}} & \frac{-(1-\xi)}{2} & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} & \frac{-(1+\xi)}{2} \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{4.42}$$

3.3. Obtención de la matriz de rigidez local.

La expresión de los trabajos virtuales [4.18] puede escribirse matricialmente:

$$\int_0^l \{\delta \varepsilon'\}^T \cdot \{\varepsilon'\} \cdot dx' = - \int_0^l \{\delta u'\}^T \cdot \{t'\} \cdot dx' + \{\delta a'^{(e)}\}^T \cdot \{q'^{(e)}\} \tag{4.43}$$

Si se tienen en cuenta las relaciones obtenidas hasta el momento:

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon'\} &= [B'] \cdot \{a'^{(e)}\} \\
\{\delta \varepsilon'\}^T &= \{\delta a'^{(e)}\}^T \cdot [B']^T \\
\{u'\} &= [N] \cdot \{a'^{(e)}\} \\
\{\delta u'\}^T &= \{\delta a'^{(e)}\}^T \cdot [N]^T \\
\{\varepsilon'\} &= [D'] \cdot \{\varepsilon'\}
\end{aligned}$$

se tiene:

$$\{\delta a'^{(e)}\}^T \cdot \left[\int_0^l [B']^T \cdot [D'] \cdot [B'] \cdot dx' \right] \cdot \{a'^{(e)}\} = \{\delta a'^{(e)}\}^T \cdot \int_0^l [N]^T \cdot \{t'\} \cdot dx' + \{\delta a'^{(e)}\}^T \cdot \{q'^{(e)}\}$$

Simplificando los movimientos virtuales:

$$\int_0^l [B']^T \cdot [D'] \cdot [B'] \cdot dx' \cdot \{a'^{(e)}\} - \int_0^l [N]^T \cdot \{t'\} \cdot dx' = \{q'^{(e)}\} \tag{4.44}$$

o de otro modo:

$$[K'^{(e)}] \cdot \{a'^{(e)}\} - \{f'^{(e)}\} = \{q'^{(e)}\} \tag{4.45}$$

donde:

$$[K^{(e)}] = \int_0^l [B']^T \cdot [D'] \cdot [B'] \cdot dx' \quad [4.46]$$

es la *matriz de rigidez del elemento* en ejes locales,

$$\{f^{(e)}\} = \int_0^l [N]^T \cdot \{t'\} \cdot dx' \quad [4.47]$$

es el *vector de fuerzas nodales del elemento* en ejes locales,

$$\{t'\} = \left\{ \begin{Bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{Bmatrix} \right\} \quad [4.48]$$

es el vector de fuerzas distribuidas sobre el elemento, donde

$$\{t'_i\} = \{q_{x'i}, q_{z'i}, m_{x'i}\}^T \quad [4.49]$$

siendo $q_{x'i}$, $q_{z'i}$ las cargas repartidas actuando en las direcciones locales x' , z' , respectivamente, y $m_{x'i}$ el momento repartido contenido en el plano $x'z'$,

$$\{q^{(e)}\} = \left\{ \begin{Bmatrix} q_1^{(e)} \\ q_2^{(e)} \end{Bmatrix} \right\} \quad [4.50]$$

es el *vector de fuerzas nodales de equilibrio*, donde

$$\{q_i^{(e)}\} = \{R_{x'i}, R_{z'i}, M_{x'i}\}^T \quad [4.51]$$

siendo $R_{x'}$, $R_{z'}$ y $M_{x'}$ las fuerzas puntuales que actúan en el nodo i del elemento según las direcciones x' , z' , respectivamente, y $M_{x'i}$ el momento nodal contenido en el plano $x'z'$.

La expresión [4.46] conviene escribirla en función de las contribuciones de tracción, flexión y cortante, lo que permite una resolución numérica más sencilla. Así,

$$[K^{(e)}] = \int_0^l \begin{bmatrix} [B'_t] & [B'_f] & [B'_c] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 & 0 \\ 0 & E \cdot I & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot A^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B'_t] \\ [B'_f] \\ [B'_c] \end{bmatrix} \cdot dx'$$

De este modo,

$$[K^{(e)}] = [K_t^{(e)}] + [K_f^{(e)}] + [K_c^{(e)}] \quad [4.52]$$

siendo

$$\begin{aligned}
 [K_t^{(e)}] &= \int_0^l [B'_t]^T \cdot (E \cdot A) \cdot [B'_t] \cdot dx' \\
 [K_f^{(e)}] &= \int_0^l [B'_f]^T \cdot (E \cdot I) \cdot [B'_f] \cdot dx' \\
 [K_c^{(e)}] &= \int_0^l [B'_c]^T \cdot (G \cdot A^*) \cdot [B'_c] \cdot dx'
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

las matrices de rigidez correspondientes a los efectos de tracción, flexión y cortante.

Todas las integrales anteriores pueden transformarse sobre el dominio normalizado del elemento. Para ello, basta tener en cuenta la relación genérica $dx' = |J^{(e)}| \cdot d\xi$, con lo que las ecuaciones [4.53] se convierten en:

$$\begin{aligned}
 [K_t^{(e)}] &= \int_{-1}^{+1} [B'_t]^T \cdot (E \cdot A) \cdot [B'_t] \cdot |J^{(e)}| \cdot d\xi \\
 [K_f^{(e)}] &= \int_{-1}^{+1} [B'_f]^T \cdot (E \cdot I) \cdot [B'_f] \cdot |J^{(e)}| \cdot d\xi \\
 [K_c^{(e)}] &= \int_{-1}^{+1} [B'_c]^T \cdot (G \cdot A^*) \cdot [B'_c] \cdot |J^{(e)}| \cdot d\xi
 \end{aligned}
 \tag{4.54}$$

expresiones que pueden evaluarse numéricamente con una cuadratura unidimensional de Legendre-Gauss, e incluso permiten la integración con cuadraturas diferentes.

3.3.1. Integración numérica.

En el método de elementos finitos, para resolver las integrales que se obtienen de una formulación isoparamétrica, lo que en el caso más general del espacio tridimensional puede ser muy laborioso, es común recurrir a la integración numérica.

De entre los múltiples métodos que existen en integración numérica (Zienkiewicz y Taylor, 2000; Hughes, 2000a; Oñate, 2002) se escoge la cuadratura de Legendre-Gauss, descrita en Ralston (1970).

Se supone una función $f(\xi)$ para la que se desea calcular la integral en el intervalo $[-1, +1]$, es decir:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) \cdot d\xi \tag{4.55}$$

La regla de integración o cuadratura de Legendre-Gauss expresa el valor de dicha integral como suma de los productos de los valores del integrando en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo por unos coeficientes (pesos) determinados. Es decir, para una cuadratura de orden p se tiene:

$$I_p = \sum_{i=1}^p f(\xi_i) \cdot W_i \quad [4.56]$$

donde W_i es el peso correspondiente al punto de integración i y p el número de dichos puntos.

Tabla 4.1. Raíces de los polinomios de Legendre y pesos correspondientes.		
n	ξ_i	W_i
1	0.0	2.0
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.0
	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.0
3	-0.774596697	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
	0.774596697	$\frac{5}{9}$
4	-0.8611363116	0.3478548451
	-0.3399810436	0.6521451549
	0.3399810436	0.6521451549
	0.8611363116	0.3478548451
5	-0.9061798459	0.2369268851
	-0.5384693101	0.4786286705
	0.0	0.5688888889
	0.5384693101	0.4786286705
	0.9061798459	0.2369268851

Una cuadratura de Legendre-Gauss de orden n es exacta para polinomios de grado $2n-1$ o menor.

El error de cálculo aproximado de una integral es d^{2n} , siendo d la distancia entre los puntos de integración (Oñate, 1995).

En la tabla 4.1 se muestran las coordenadas ξ_i y los pesos W_i para las cinco primeras cuadraturas de Legendre-Gauss.

Se puede observar que todos los puntos de integración están expresados en el espacio normalizado $-1 \leq \xi \leq 1$, lo que resulta de gran utilidad para el cálculo de las matrices del elemento referidas a las coordenadas naturales.

Otra característica importante de la cuadratura de Legendre-Gauss es que utiliza el mínimo número de puntos de integración para conseguir un error determinado en el cálculo de la integral, lo que implica una reducción de las operaciones matemáticas en relación a otros métodos de integración numérica.

3.3.2. Matriz de rigidez local.

Se va a proceder calculando las matrices de rigidez correspondientes a los efectos de tracción, flexión y cortante, teniendo en cuenta las expresiones [4.54] y las definiciones de las matrices de deformación de tracción, flexión y cortante dadas en [4.42].

Comenzando por la expresión de la matriz de rigidez correspondiente al efecto de tracción $[K_t^{(e)}]$:

$$[K_t^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{l^{(e)}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{l^{(e)}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (E \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi$$

$$[K_t^{(e)}] = \left(\frac{E \cdot A}{l} \right)^{(e)} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot d\xi$$

Al ser todos los miembros del integrando constantes, sólo se exige un punto de integración, con $W_i=2$, con lo que se obtiene:

$$[K_t^{(e)}] = \left(\frac{E \cdot A}{l} \right)^{(e)} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [4.57]$$

Del mismo modo, la expresión de la matriz de rigidez correspondiente al efecto de flexión $[K_f^{(e)}]$ es:

$$[K_f^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \cdot (E \cdot I) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi$$

$$[K_f^{(e)}] = \left(\frac{E \cdot I}{l} \right)^{(e)} \cdot \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot d\xi$$

Al igual que en el caso anterior, sólo se exige un punto de integración, con $W_i=2$. Así:

$$[K_f^{(e)}] = \left(\frac{E \cdot I}{l} \right)^{(e)} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad [4.58]$$

Por último, la expresión de la matriz de rigidez correspondiente al efecto de cortante $[K_c^{(e)}]$ se obtiene:

$$[K_c^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{l^{(e)}}{2} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{l^{(e)}}{2} \\ -\frac{l^{(e)}}{2} \\ 0 \\ \frac{l^{(e)}}{2} \end{bmatrix} \cdot (G \cdot A^*) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{l^{(e)}} & \frac{-(1-\xi)}{2} & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} & \frac{-(1+\xi)}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi$$

$$[K_c^{(e)}] = \left(\frac{G \cdot A^*}{I} \right)^{(e)} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{l^{(e)}(1-\xi)}{4} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{l^{(e)}(1-\xi)}{4} & 0 & 0 \\ \frac{(l^{(e)})^2(1-\xi)^2}{8} & 0 & \frac{-l^{(e)}(1-\xi)}{4} & 0 & 0 & \frac{4}{8} & \frac{(l^{(e)})^2(1-\xi)^2}{8} & 0 & 0 \\ \text{sim.} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-l^{(e)}(1-\xi)}{4} & \frac{(l^{(e)})^2(1-\xi)^2}{8} & 0 \end{bmatrix} \cdot d\xi$$

La integración exacta de la matriz de rigidez de cortante precisa dos puntos de integración por aparecer en el integrando de $[K_c^{(e)}]$ términos de segundo orden en ξ , obteniéndose:

$$[K_c^{(e)}] = \left(\frac{G \cdot A^*}{I} \right)^{(e)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l^{(e)}}{2} & 0 & 0 & -1 & \frac{l^{(e)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{3} & 0 & 0 & \frac{-l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-l^{(e)}}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{-l^{(e)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{6} & 0 & 0 & \frac{-l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [4.59]$$

De este modo, sumando las matrices [4.57], [4.58] y [4.59] se obtiene la matriz de rigidez del elemento en ejes locales.

En muchos casos la integración numérica puede hacer que la matriz de rigidez obtenida sea singular, lo que impediría la resolución del sistema de

ecuaciones [4.45]. Oñate (2002), resume el problema afirmando que la integración numérica equivale a introducir k relaciones independientes en cada punto de integración, donde k es el número de componentes del vector deformación que interviene en el cálculo de la matriz. De este modo, si p es el número total de integración de la malla y j es el número de grados de libertad libres (una vez descontados los movimientos prescritos), la matriz de rigidez será singular si el número de relaciones introducidas no es suficiente para equilibrar el número total de incógnitas, es decir, si:

$$j - p \cdot k > 0 \quad [4.60]$$

En principio, parecería lógico continuar con el desarrollo del método, pues a priori, del mismo modo que sucedería con los métodos de cálculo matriciales, únicamente restaría para completar el cálculo la obtención de la matriz de rigidez del elemento y la matriz de fuerzas nodales en coordenadas globales antes de realizar el ensamblaje de todas las matrices de los elementos en los que se ha discretizado el arco.

Sin embargo, antes de continuar con el procedimiento descrito es necesario analizar el fenómeno de bloqueo producido por la resolución numérica del método de los elementos finitos.

3.4. El efecto de bloqueo por cortante.

3.4.1. Introducción.

El fenómeno del bloqueo es bien conocido en el mundo de la ingeniería. Generalmente se manifiesta por la pérdida del significado de los resultados numéricos en estructuras en las que el espesor es pequeño en comparación con otras dimensiones (Chenais y Paumier, 1994). Desde la perspectiva del análisis numérico, un síntoma característico es que el error estimado en estas formulaciones incorpora una dependencia del espesor de la estructura, de manera que los modelos degeneran cuando el parámetro se aproxima a cero (Chapelle, 1997).

El bloqueo para el modelo de viga de Timoshenko fue estudiado en profundidad por Hughes y col. (1977), y por Arnold (1981), quienes identificaron el término de cortante como el origen del problema, y lo solventaron con la utilización de métodos de integración reducida o por métodos mixtos para obtener estimaciones de error independientes del espesor. Métodos similares fueron empleados en el caso de formulaciones para arcos circulares sin tener en cuenta el efecto del cortante (Kikuchi, 1982), con objeto de solventar el bloqueo originado por el término de membrana. Significativamente distinto fue el enfoque desarrollado por Loula y col. (1987),

quienes en un modelo de arco circular, con la inclusión de los efectos de membrana y de cortante, aplicaron una formulación de Hellinger-Reissner y un esquema numérico basado en el método mixto de Petrov-Galerkin.

Zerner (1994) resuelve el problema concreto del bloqueo en arcos biempotrados, empleando una formulación de Kirchhoff-Love y siguiendo las recomendaciones de Habbal y Chenais (1992), discretizando el arco en *elementos de viga* rectos de pequeña longitud, del orden del canto del arco al cuadrado.

Por tanto, para problemas unidimensionales se sabe como construir elementos finitos libres de bloqueos.

Para placas basadas en la teoría de Reissner-Mindlin se han conseguido avances considerables, pudiendo llegar a afirmarse que en la actualidad el problema de bloqueo por cortante ha sido resuelto (Chapelle y Stenberg, 1999).

Con respecto a las láminas la situación presente está lejos de ser satisfactoria. Desde el punto de vista de análisis numérico, no es sorprendente encontrar dificultades con las láminas. De hecho, el concepto general de lámina cubre familias enteras con diferencias muy marcadas de comportamiento, dependiendo de la geometría de la superficie media, de las condiciones de contorno y de las cargas. Por consiguiente, el objetivo de desarrollar un *elemento de lámina* puede ser muy ambicioso (Chapelle y Stenberg, 1999).

3.4.2. Estudio del efecto de bloqueo por cortante.

Para apreciar el efecto de la integración numérica y su relación con el efecto de bloqueo por cortante, se va a recurrir al clásico ejemplo de una viga en voladizo sometida a una carga puntual en un extremo, discretizada con un solo elemento (figura 4.10).

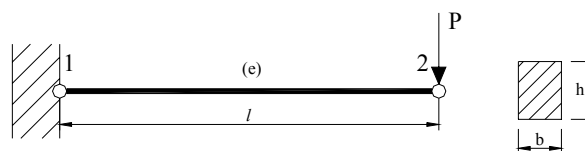


Figura 4.10. Viga en voladizo. Análisis con un elemento de 2 nodos.

Si se estudia la flecha en el extremo libre, bajo la carga puntual, con dos hipótesis, una sin tener en cuenta la contribución del esfuerzo cortante en la deformación (teoría de Euler-Bernoulli) y otra teniendo en cuenta esta contribución (teoría de Timoshenko), los valores que se obtienen en vigas esbeltas deben coincidir (Timoshenko, 1989).

Así, el valor de la flecha exacta en el extremo libre de la viga, según la teoría de Euler-Bernoulli, es:

$$(w_2)_f = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad [4.61]$$

Del mismo modo, el valor de la flecha $(w_2)_c$ en el extremo volado, con la teoría de Timoshenko es:

$$(w_2)_c = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \left(\frac{l}{G \cdot A^*} + \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I} \right) \cdot P \quad [4.62]$$

$$\gamma = \frac{12 \cdot E \cdot I}{G \cdot A^* \cdot l^2} \quad [4.63]$$

Si se toma como coeficiente de Poisson el valor 0.25 y, como se muestra en la figura 4.10, la sección de la viga es rectangular, se tiene:

$$\gamma = \frac{12 \cdot E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}{E \cdot \frac{5 \cdot b \cdot h}{2 \cdot (1 + 0.25)} \cdot l^2} = 3 \cdot \left(\frac{h}{l} \right)^2 = \frac{3}{\lambda^2} \quad [4.64]$$

donde $\lambda = \frac{l}{h}$ se denomina coeficiente de esbeltez de la viga.

Babůska y Suri (1992) afirman que el efecto de bloqueo puede aparecer en la aproximación realizada con elementos finitos en problemas elásticos cuando el coeficiente de Poisson es próximo a 0.5.

Por tanto, si se define φ como el cociente entre el valor de la flecha según las teorías de Timoshenko y Euler-Bernoulli, se obtiene:

$$\varphi = \frac{(w_2)_c}{(w_2)_f} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{\left(\frac{l}{G \cdot A^*} + \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I} \right) \cdot P}{\left(\frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I} \right) \cdot P} = \frac{3 \cdot (4 \cdot \lambda^2 + 3)}{4 \cdot \lambda^2 \cdot (\lambda^2 + 3)} \quad [4.65]$$

Como se ha indicado, para vigas muy esbeltas los valores de las flechas deberían coincidir o, matemáticamente, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi = 1$. Sin embargo, si se calcula el límite de φ en la expresión [4.64] se obtiene que es cero, lo que indica que la

teoría de Timoshenko es incapaz de reproducir en el límite la solución de la teoría clásica de vigas.

A medida que la longitud aumenta, se produce un fenómeno de soberrrigidez numérica que cada vez va tomando mayor importancia hasta llegar a bloquear la solución, haciéndola, en el límite, infinitamente rígida.

3.4.3. Integración reducida.

Uno de los procedimientos para evitar el bloqueo por cortante consiste en disminuir la influencia del cortante subintegrando los términos de $[K_c]$, utilizando un número de puntos de integración inferior al necesario para su cálculo exacto. Esta solución fue propuesta en primer lugar por Hughes y col. (1977).

Tabla 4.2. Vigas de gran canto. Comparación de la integración reducida (un punto) e integración completa (dos puntos) para un elemento de viga lineal (Hughes, 2000).		
Número de elementos	Un punto	Dos puntos
1	0.762	$0.416 \cdot 10^{-1}$
2	0.940	0.445
4	0.985	0.762
8	0.996	0.927
16	0.999	0.981

Tabla 4.3. Vigas de canto normal. Comparación de la integración reducida (un punto) e integración completa (dos puntos) para un elemento de viga lineal (Hughes, 2000).		
Número de elementos	Un punto	Dos puntos
1	0.750	$0.200 \cdot 10^{-4}$
2	0.938	$0.800 \cdot 10^{-4}$
4	0.984	$0.320 \cdot 10^{-4}$
8	0.996	$0.128 \cdot 10^{-4}$
16	0.999	$0.512 \cdot 10^{-3}$

Para constatar la bondad de la integración reducida, basta analizar las tablas 4.2 y 4.3, elaboradas por Hughes (2000), donde se compara el resultado de ϕ con y sin integración reducida, para un número variable de elementos en los que se discretiza la viga. La tabla 4.2 recoge los resultados para vigas de gran canto, mientras que la tabla 4.3 muestra la comparación para vigas de canto normal.

Se puede comprobar cómo empleando la integración reducida, en vigas que se discretizan en ocho elementos o más, el cálculo según la teoría de Timoshenko coincide con el que se obtiene siguiendo la teoría clásica de Euler-Bernoulli (valores de ϕ superiores a 0.996; ya a partir de la discretización de la viga en dos elementos ϕ alcanza el valor 0.938).

También se puede apreciar cómo el comportamiento de la teoría de Timoshenko, incluso sin el empleo de la integración reducida, es mucho mejor en vigas de gran canto, pues se muestra razonablemente exacto también a partir de ocho elementos (valores de ϕ superiores a 0.927). En vigas de canto normal se aprecia el efecto del bloqueo del cortante con independencia del número de elementos en los que se discretice la viga.

El buen comportamiento de la integración reducida se debe a que, al infravalorar los términos de rigidez de cortante, la flexibilidad de la estructura debe aumentar, contrarrestando de esta forma la excesiva rigidez del cortante.

La integración reducida de la matriz de rigidez de cortante precisa un solo punto de integración en lugar de los dos que necesita la integración exacta. De este modo, y recordando su definición en ejes locales, se obtiene:

$$[K_c^{(e)}] = \left(\frac{G \cdot A^*}{I} \right)^{(e)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{I^{(e)}}{2} & 0 & -1 & \frac{I^{(e)}}{2} \\ 0 & \frac{I^{(e)}}{2} & \frac{(I^{(e)})^2}{4} & 0 & -\frac{I^{(e)}}{2} & \frac{(I^{(e)})^2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{I^{(e)}}{2} & 0 & 1 & -\frac{I^{(e)}}{2} \\ 0 & \frac{I^{(e)}}{2} & \frac{(I^{(e)})^2}{4} & 0 & -\frac{I^{(e)}}{2} & \frac{(I^{(e)})^2}{4} \end{bmatrix} \quad [4.66]$$

3.4.4. Módulo de rigidez residual.

Aún se puede mejorar el comportamiento del elemento mediante la utilización de un *módulo de rigidez residual* (Oñate, 1995), o *residual bending*

flexibility, RBF. Este concepto, introducido por MacNeal (1978), se define de manera que la matriz de flexibilidad exacta y la obtenida con un solo elemento e integración reducida coincidan.

Para deducir el RBF se retorna al cálculo de la viga en voladizo que ha servido de base para constatar el efecto de bloqueo por cortante.

La ecuación de equilibrio global de la viga es la siguiente:

$$[K^{(e)}] \cdot \{a^{(e)}\} = \{f^{(e)}\} \quad [4.67]$$

quedando la matriz de rigidez definida por:

$$[K^{(e)}] = [K_f^{(e)}] + [K_c^{(e)}]$$

Sustituyendo los valores de las matrices de rigidez de flexión y cortante, definidas por [4.58] y [4.59], eliminando las filas y columnas primera y cuarta debido a la no existencia de desplazamiento horizontal, la ecuación [4.67] se escribe:

$$\begin{bmatrix} \frac{G \cdot A^*}{I} & \frac{G \cdot A^*}{2} & -\frac{G \cdot A^*}{I} & \frac{G \cdot A^*}{2} \\ \left(\frac{G \cdot A^*}{3} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) & -\frac{G \cdot A^*}{2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{6} \cdot I - \frac{E \cdot I}{I} \right) & \frac{G \cdot A^*}{2} \\ \hline \text{sim.} & \frac{G \cdot A^*}{I} & -\frac{G \cdot A^*}{2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{3} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{y1} \\ M_1 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [4.68]$$

Al tener en cuenta las restricciones impuestas por el empotramiento, el desplazamiento y giro de este nodo son nulos, por lo que se pueden eliminar las dos primeras filas y columnas, resultando que la matriz de rigidez global es:

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{G \cdot A^*}{I} & -\frac{G \cdot A^*}{2} \\ -\frac{G \cdot A^*}{2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{3} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) \end{bmatrix} \quad [4.69]$$

mientras que la matriz de flexibilidad $[F^{(e)}]$, inversa de la matriz de rigidez $[K^{(e)}]$, sería:

$$[F^{(e)}] = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{I}{G \cdot A^*} + \frac{I^3}{3 \cdot E \cdot I} \right) & \frac{I^2}{E \cdot I} \\ \frac{I^2}{E \cdot I} & \frac{I}{E \cdot I} \end{bmatrix} \quad [4.70]$$

donde el coeficiente γ viene definido por [4.63].

Si en vez de utilizar la expresión de la matriz de rigidez de cortante $[K_c^{(e)}]$ obtenida con integración exacta dada por [4.59] se emplea la expresión determinada con integración reducida, la ecuación de equilibrio global de la viga se obtiene a partir de [4.58] y [4.66],

$$\begin{bmatrix} \frac{G \cdot A^*}{I} & \frac{G \cdot A^*}{2} & -\frac{G \cdot A^*}{I} & \frac{G \cdot A^*}{2} \\ \left(\frac{G \cdot A^*}{4} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) & -\frac{G \cdot A^*}{2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{4} \cdot I - \frac{E \cdot I}{I} \right) & \frac{G \cdot A^*}{2} \\ \hline \text{sim.} & \frac{G \cdot A^*}{I} & \frac{G \cdot A^*}{2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{4} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{y1} \\ M_1 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [4.71]$$

De igual manera, se eliminan las dos primeras filas y columnas, que se corresponden con los grados de libertad nulos del empotramiento, y se obtiene la nueva matriz de rigidez global,

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{G \cdot A^*}{I} & -\frac{G \cdot A^*}{2} \\ -\frac{G \cdot A^*}{2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{4} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) \end{bmatrix} \quad [4.72]$$

y la matriz de flexibilidad correspondiente:

$$[F^{(e)}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{I}{G \cdot A^*} + \frac{I^3}{4 \cdot E \cdot I} \right) & \frac{I^2}{E \cdot I} \\ \frac{I^2}{E \cdot I} & \frac{I}{E \cdot I} \end{bmatrix} \quad [4.73]$$

Se puede comprobar que entre [4.70] y [4.73] el único elemento distinto es f_{11} . Si se igualan entre sí, y denominando $\overline{G \cdot A^*}$ al módulo de rigidez residual (o RBF), se tiene:

$$\frac{I^{(e)}}{\overline{G \cdot A}^*} + \frac{(I^{(e)})^3}{4 \cdot E \cdot I} = \frac{I^{(e)}}{G \cdot A^*} + \frac{(I^{(e)})^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

de donde

$$\frac{I^{(e)}}{\overline{G \cdot A}^*} = \frac{I^{(e)}}{G \cdot A^*} + \frac{(I^{(e)})^3}{12 \cdot E \cdot I}$$

o utilizando el coeficiente γ

$$\overline{G \cdot A}^* = \frac{G \cdot A^*}{1 + \frac{1}{\gamma}} \quad [4.74]$$

Si se introduce el valor de $\overline{G \cdot A}^*$ en la expresión de $[K^{(e)}]$ de [4.66], y se suma a las matrices de rigidez de tracción $[K_t^{(e)}]$ y de flexión $[K_f^{(e)}]$ definidas por [4.57] y [4.58], respectivamente, se tiene una expresión mejorada de la matriz de rigidez del elemento $[K^{(e)}]$ en coordenadas locales,

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{I} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot I} & \frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 2} & 0 & \frac{-G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot I} & \frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 2} \\ 0 & \frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 4} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) & 0 & \frac{-G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 2} & \left(\frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 4} \cdot I - \frac{E \cdot I}{I} \right) \\ \hline \text{sim.} & & & \frac{E \cdot A}{I} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot I} & \frac{-G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 2} \\ & & & & \left(\frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 4} \cdot I + \frac{E \cdot I}{I} \right) & \left(\frac{G \cdot A^*}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 4} \cdot I - \frac{E \cdot I}{I} \right) \end{bmatrix} \quad [4.75]$$

Se va a continuar realizando operaciones matemáticas, con objeto de llegar a expresiones más significativas. Así, en primer lugar se va a operar el

paréntesis $\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$, para luego ir deduciendo expresiones para los distintos elementos $K_{ij}^{(e)}$.

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma}} = \frac{12 \cdot E \cdot I + G \cdot A^* \cdot l^2}{12 \cdot E \cdot I}$$

$$K_{11}^{(e)} = K_{33}^{(e)} = -K_{13}^{(e)} = \frac{\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3}}{1 + \frac{12 \cdot E \cdot I}{G \cdot A^* \cdot l^2}} \quad [4.76]$$

Si se tiene en cuenta las definiciones de radio de giro de la sección transversal $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$, y de sección reducida $A^* = \alpha \cdot A$, la expresión [4.76] se escribe:

$$K_{11}^{(e)} = K_{33}^{(e)} = -K_{13}^{(e)} = \frac{\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3}}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2}$$

Por la sencilla relación que existe entre los coeficientes calculados $K_{11}^{(e)}, K_{33}^{(e)}, K_{13}^{(e)}$ y los coeficientes $K_{12}^{(e)}, K_{14}^{(e)}, K_{23}^{(e)}, K_{34}^{(e)}$, se puede escribir de manera directa:

$$K_{12}^{(e)} = K_{14}^{(e)} = -K_{23}^{(e)} = -K_{34}^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{2} \cdot K_{11}^{(e)} = \frac{\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^3}}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2}$$

Del mismo modo, $K_{22}^{(e)}$ y $K_{44}^{(e)}$ quedan definidos por:

$$K_{22}^{(e)} = K_{44}^{(e)} = \frac{G \cdot A^* \cdot l}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 4} + \frac{E \cdot I}{l} = \frac{E \cdot I}{l} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2} + 1 \right)$$

El coeficiente de la matriz de rigidez $K_{24}^{(e)}$ vale:

$$K'_{24}^{(e)} = \frac{G \cdot A^* \cdot l}{\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot 4} - \frac{E \cdot I}{l} = \frac{E \cdot I}{l} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2} - 1 \right)$$

De este modo se han definido todos los coeficientes de la matriz de rigidez de un elemento de pórtico plano, teniendo en cuenta que la contribución de la matriz de cortante se ha obtenido mediante la técnica de integración reducida con la mejora del empleo del concepto de módulo de rigidez residual.

Por tanto, en coordenadas locales, un elemento de pórtico plano según la teoría de Timoshenko queda definido por:

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 & 1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 & 1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 & 0 & \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 & 1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 \\ \frac{E \cdot I}{l} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2} + 1 \right) & 0 & \frac{E \cdot I}{l} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2} - 1 \right) & 0 & 0 & \frac{E \cdot I}{l} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2} + 1 \right) \\ \text{sim.} & \frac{E \cdot A}{l} & 0 & \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & 0 \\ & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & 1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & 1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2 & 0 \\ & 0 & \frac{E \cdot I}{l} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2} + 1 \right) & 0 & 0 & \frac{E \cdot I}{l} \cdot \left(\frac{3}{1 + \frac{12 \cdot E}{\alpha \cdot G} \cdot \left(\frac{r}{l}\right)^2} + 1 \right) \end{bmatrix} \quad [4.77]$$

Przemieniecki (1968), llegó a una expresión equivalente en su célebre obra de cálculo matricial. Así, propuso:

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{A \cdot E}{l} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2 \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{-12 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2 \cdot (1 + \phi)} \\ 0 & \frac{E \cdot I \cdot (4 + \phi)}{l \cdot (1 + \phi)} & \frac{E \cdot I \cdot (2 - \phi)}{l \cdot (1 + \phi)} & 0 & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{l^2 \cdot (1 + \phi)} & \frac{E \cdot I \cdot (2 - \phi)}{l \cdot (1 + \phi)} \\ \text{sim.} & & & \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3 \cdot (1 + \phi)} & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{l^2 \cdot (1 + \phi)} \\ & & & 0 & \frac{E \cdot I \cdot (4 + \phi)}{l \cdot (1 + \phi)} & \frac{E \cdot I \cdot (2 - \phi)}{l \cdot (1 + \phi)} \end{bmatrix}$$

donde $A =$ área de la sección transversal

$E =$ módulo de elasticidad del material

$l =$ longitud del elemento

$I =$ momento de inercia

$\phi = \frac{12 \cdot E \cdot I}{G \cdot A^* \cdot l^2}$

$G =$ módulo de rigidez

$A^* =$ área reducida

En la expresión [4.77] se puede comprobar que, si el elemento es muy esbelto, $\frac{r}{l} \rightarrow 0$, y la matriz de rigidez local queda de la forma

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & 0 & \frac{-12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} & 0 & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} \\ \text{sim.} & & & \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{-6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ & & & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} \end{bmatrix}$$

[4.78]

coincidente con la matriz de rigidez que se obtendría en un elemento de pórtico plano siguiendo la teoría de Euler-Bernoulli.

Existen otras alternativas para eliminar el efecto de bloqueo por cortante, como la utilización para la flecha de una interpolación polinómica de grado mayor que para el giro (Crisfield, 1986), o como el método que se basa en imponer una deformación de cortante *a priori*, utilizando interpolaciones diferentes para la flecha, el giro y la deformación de cortante transversal (Zienkiewicz y Lefebvre, 1987; Bathe, 1996).

3.5. Transformación a ejes globales.

Hasta ahora todas las matrices se han obtenido respecto a los ejes locales x', z' , de cada elemento finito en los que se ha discretizado el arco. Para poder definir la matriz de rigidez de la estructura completa será necesario, antes de realizar el ensamblaje de las ecuaciones matriciales de los elementos que constituyen el arco y de las fuerzas que sobre ellos actúan, emplear el mismo sistema de referencia para toda la estructura, que quedará definido por los ejes globales x, z .

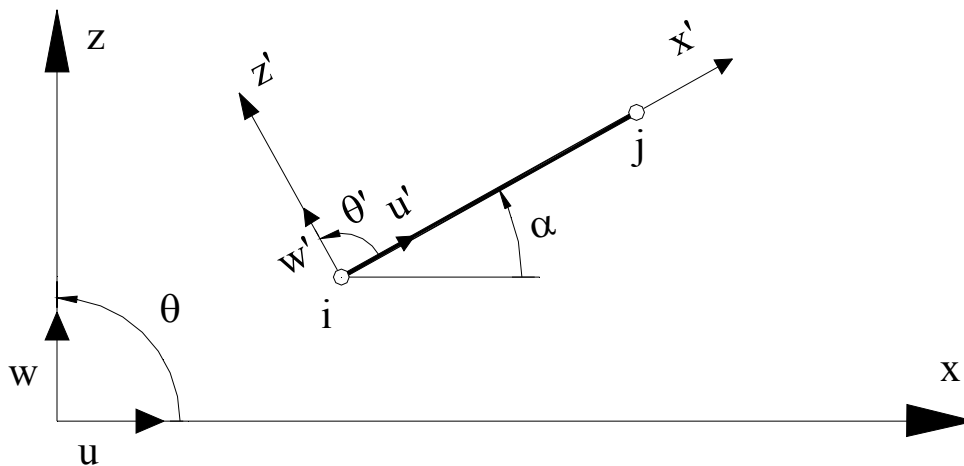


Figura 4.11. Ejes locales de un elemento y ejes globales de la estructura.

La transformación entre ejes locales y ejes globales (figura 4.11) queda definida por las relaciones:

$$u'_i = u_i \cdot \cos \alpha + w_i \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$w'_i = -u_i \cdot \operatorname{sen} \alpha + w_i \cdot \cos \alpha$$

$$\theta'_i = \theta_i$$

De forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ w'_i \\ \theta'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

o abreviadamente

$$\{a'_i\} = [L_i] \cdot \{a_i\}$$

donde $[L_i]$ es la matriz de rotación para la transformación de coordenadas generales o globales a locales del nudo i . La inversa transforma las coordenadas de ejes locales a generales, y puesto que ambos ejes son ortogonales, la inversa es igual a la transpuesta (Argüelles, 1986).

Además, por ser recto el elemento, $[L_i] = [L_j] = [L]$. De este modo, la relación entre componentes locales y globales de movimientos y fuerzas debe escribirse como:

$$\begin{aligned} \{a_i^{(e)}\} &= [L] \cdot \{a_i^{(e)}\} \\ \{f_i^{(e)}\} &= [L] \cdot \{f_i^{(e)}\} \end{aligned} \quad [4.79]$$

donde

$$\begin{aligned} \{a_i^{(e)}\} &= \{u_{oi}, w_{oi}, \theta_{xi}\}^T \\ \{f_i^{(e)}\} &= \{f_{xi}, f_{zi}, M_{xi}\}^T \end{aligned} \quad [4.80]$$

son los vectores de movimientos y fuerzas en ejes globales.

De la expresión [4.79] se deduce:

$$\begin{aligned} \{a_i^{(e)}\} &= [T^{(e)}] \cdot \{a_i^{(e)}\} \\ \{f_i^{(e)}\} &= [T^{(e)}] \cdot \{f_i^{(e)}\} \end{aligned} \quad [4.81]$$

donde

$$[T^{(e)}] = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [0] & [L] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad [4.82]$$

es la matriz de transformación del elemento de pórtico plano de dos nodos.

Si se utilizan las ecuaciones [4.45] y [4.81], se obtiene:

$$\begin{aligned} [q^{(e)}] &= [T^{(e)}]^T \cdot [q'^{(e)}] = [T^{(e)}]^T \cdot [K'^{(e)}] \cdot \{a'^{(e)}\} - \{f'^{(e)}\} = \\ &= [T^{(e)}]^T \cdot [K'^{(e)}] \cdot [T^{(e)}] \cdot \{a^{(e)}\} - [T^{(e)}]^T \cdot \{f'^{(e)}\} = \\ &= [K^{(e)}] \cdot \{a^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} \end{aligned} \quad [4.83]$$

que es la nueva ecuación matricial de equilibrio, donde fuerzas y movimientos están referidos a los ejes globales x, z . En esta expresión,

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] &= [T^{(e)}]^T \cdot [K'^{(e)}] \cdot [T^{(e)}] \\ \{f^{(e)}\} &= [T^{(e)}]^T \cdot \{f'^{(e)}\} \end{aligned} \quad [4.84]$$

son la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales del elemento en ejes globales.

3.6. Ensamblaje de las ecuaciones.

Una vez determinadas las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas nodales equivalentes en coordenadas globales de los elementos que componen el arco, se procede a su ensamblaje para obtener la ecuación global de la estructura.

Para ello, la expresión de equilibrio de un arco discretizado en elementos rectos se obtiene a partir de la sencilla regla que expresa que las fuerzas de un nodo, debidas a los elementos que concurren en él, es igual a la fuerza exterior que actúa en dicho nodo. En forma matemática,

$$\sum_e q_i^{(e)} = q_j^{\text{exterior}} \quad [4.85]$$

De esta manera se define la ecuación matricial de equilibrio global de la estructura como

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad [4.86]$$

donde la matriz de rigidez global del arco $[K]$, debido a la configuración que adopta el arco en la discretización, en la que todos los nodos son comunes a dos elementos, salvo el primero y último (los apoyos), adopta la forma

$$\begin{bmatrix}
 [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & \dots & [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\
 [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & \dots & [0] & [0] & [0] & \dots & [0] \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 [0] & [0] & \dots & [K_{i-1,i-1}] & [K_{i-1,i}] & [0] & \dots & [0] \\
 [0] & [0] & \dots & [K_{i,i-1}] & [K_{i,i}] & [K_{i,i+1}] & \dots & [0] \\
 [0] & [0] & \dots & [0] & [K_{i+1,i}] & [K_{i+1,i+1}] & \dots & [0] \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 [0] & [0] & \dots & [0] & [0] & [0] & \dots & [K_{n,n}]
 \end{bmatrix} \quad [4.87]$$

En esta matriz, todas las submatrices $[K_{i,i}]$ de la diagonal principal, salvo la primera y última, proceden de la suma (ensamblaje) de dos elementos lineales consecutivos. La matriz $[K]$ es cuadrada y de orden $3 \cdot (n+1)$, siendo n el número de elementos finitos en los que se ha discretizado el arco.

3.7. Cálculo de deformaciones y esfuerzos.

En primer lugar se definen las condiciones de contorno. Al estudiar la tipología de arcos biapoyados y biempotrados, las vinculaciones exteriores del arco afectarán únicamente a los nodos extremos del primer y último elemento de pórtico plano en los que se discretiza, de modo que los desplazamientos quedarán definidos por los vectores $\{0, 0, \theta_x\}^T$ o $\{0, 0, 0\}^T$ en función de si se trata de una articulación o de un empotramiento.

De este modo, establecida la ecuación matricial global del arco, definida por [4.86], e impuestas las condiciones de contorno, se pueden calcular los desplazamientos nodales, resolviendo el sistema planteado. Así,

$$\{a\} = [K]^{-1} \cdot \{f\} \quad [4.88]$$

Una vez obtenidos los desplazamientos nodales, determinar deformaciones y esfuerzos en cualquier nodo del arco es sencillo, pues basta hacer uso de las expresiones estudiadas. Así, quedan definidos por:

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon'\} &= [B'] \cdot \{a'\} = [B] \cdot \{a\} \\
 \{\sigma'\} &= \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ M_{x'} \\ Q_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 & 0 \\ 0 & E \cdot I & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot A^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon'_t \\ \varepsilon'_f \\ \varepsilon'_c \end{Bmatrix} = [D'] \cdot \{\varepsilon'\} = [D'] \cdot [B] \cdot \{a\} \quad [4.89]
 \end{aligned}$$

Capítulo 5

Estudio de arcos por el método de elementos finitos: elementos de pórtico plano de Euler-Bernoulli.

1.	Teoría básica de la flexión de Euler-Bernoulli	141
1.1.	Condiciones de equilibrio	141
1.2.	Campo de desplazamientos	142
1.3.	Campo de deformaciones	144
1.4.	Campo de tensiones	145
1.5.	Relaciones constitutivas	145
1.6.	Principio de los trabajos virtuales	146
2.	Formulación de elementos finitos.....	147
2.1.	Discretización del campo de movimientos	147
2.2.	Discretización del campo de deformaciones generalizadas	151
2.3.	Obtención de la matriz de rigidez local	152
2.4.	Matriz de rigidez global y ensamblaje de ecuaciones	159
2.5.	Obtención del vector de fuerzas equivalentes	159
2.5.1.	Carga uniformemente distribuida $q_{x'}$	159
2.5.2.	Carga uniformemente distribuida $q_{z'}$	161
2.5.3.	Carga concentrada $P_{x'}$	162
2.5.4.	Carga concentrada $P_{z'}$	163
2.5.5.	Par concentrado $M_{x'}$	165

Capítulo 5.

Estudio de arcos por el método de elementos finitos: elementos de pórtico plano de Euler-Bernoulli.

1. Teoría básica de la flexión de Euler-Bernoulli.

La teoría clásica de vigas, formulada por Euler-Bernoulli, se basa en los siguientes supuestos (Felippa, 2001a):

4. *Simetría en el plano.* El eje longitudinal es recto, y la sección transversal de la viga tiene un plano longitudinal de simetría. La resultante de las cargas transversales actúan sobre cada sección de este plano.
5. *Variación de la sección transversal.* La sección transversal no experimenta cambios bruscos: o es constante, o varía con suavidad.
6. *Ortogonalidad.* Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación.
7. *Energía de deformación.* La energía interna de deformación únicamente considera las deformaciones debidas a la flexión. Los efectos del cortante y del esfuerzo axial se ignoran.
8. *Linearización.* Se asume que las deformaciones, distorsiones y giros son infinitesimales.
9. *Comportamiento elástico.* La viga se fabrica de material elástico e isotrópico. Sin embargo, se amplía el campo de actuación a vigas constituidas por material ortótropo.

La hipótesis de Euler-Bernoulli refleja con fidelidad el comportamiento de elementos solicitados a flexión esbeltos, con una relación longitud/canto superior a 20 (Goicolea, 2003), pues las secciones transversales se conservan planas después de la deformación.

1.1. Condiciones de equilibrio.

Se considera un elemento de pórtico plano, con los ejes representados en la figura 5.1, sometido a sendas cargas distribuidas por unidad de longitud, según los ejes x y z , de signo positivo, del que se estudia el equilibrio de una rebanada aislada:

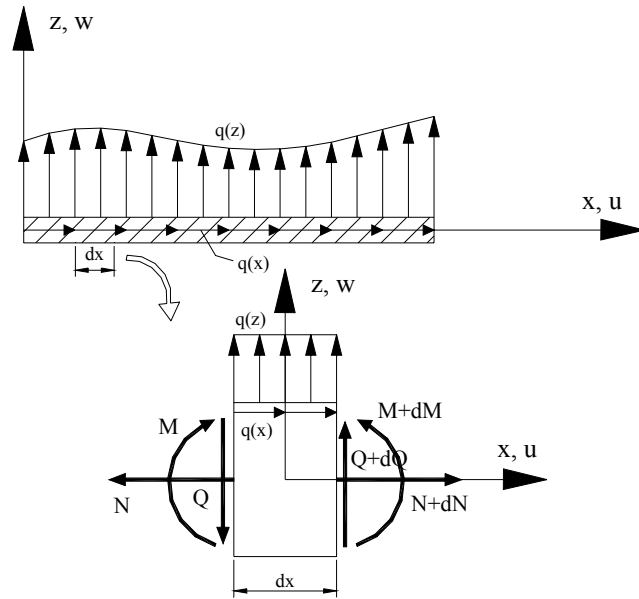


Figura 5.1. Elemento de pórtico plano sometido a cargas uniformes según los ejes x y z . Equilibrio de una rebanada aislada.

Del equilibrio de la rebanada (figura 5.1), se deduce:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad -N + (N + dN) + q_x \cdot dx = 0 \\ \sum F_z = 0 & \quad -Q + (Q + dQ) + q_z \cdot dx = 0 \\ \sum M = 0 & \quad -M + (M + dM) + Q \cdot dx - q_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - q_x \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Despreciando los infinitésimos de segundo orden, se obtienen las relaciones:

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0 \quad [5.1]$$

$$\frac{dQ}{dx} + q_z = 0 \quad [5.2]$$

$$\frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad [5.3]$$

1.2. Campo de desplazamientos.

Como en el Capítulo anterior, para su estudio se va a considerar un arco de luz l , flecha f , sección transversal de área A y momento de inercia I , sobre el

que actúan una serie de cargas y momentos contenidos en el plano (figura 5.2). Además, se supone que el arco está discretizado en elementos rectos. Cada elemento tiene asociado unos ejes locales x' , z' definidos por su dimensión longitudinal (eje x'), y su normal tomada en sentido contrario al giro de las agujas del reloj (eje z').

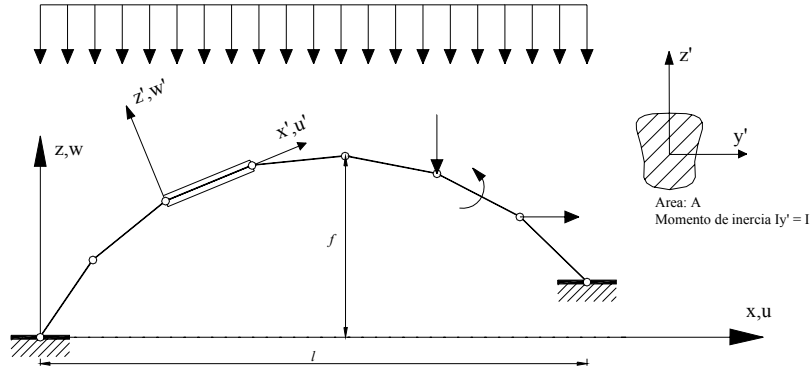


Figura 5.2. Discretización de un arco con elementos de pórtico plano.

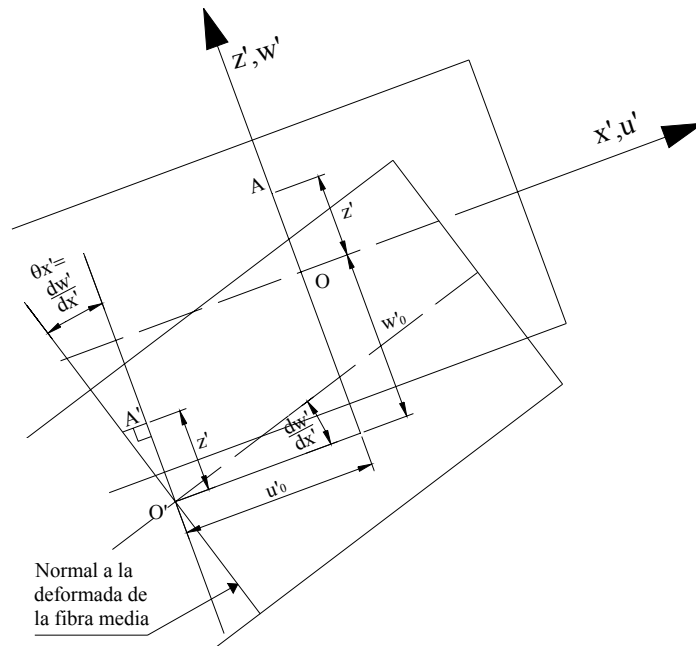


Figura 5.3. Deformación y giro de la sección normal a la fibra media de un elemento de pórtico plano, según la teoría de la flexión de Euler-Bernoulli.

En la figura 5.3 se muestra la deformación de una sección normal a la fibra media de uno de los elementos de pórtico plano de Euler-Bernoulli en los que se ha discretizado el arco. De la tercera hipótesis se deduce que el giro $\theta_{x'}$ es igual a la deformada del eje del elemento, es decir:

$$\theta_{x'} = \frac{dw'_{0}}{dx'} \quad [5.4]$$

Los desplazamientos de un punto genérico A, situado sobre la normal OA, siendo O el punto de corte de la normal con el eje del elemento lineal, se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} u'(x', z') &= -u'_o(x') - z' \cdot \theta_{x'}(x') \\ v'(x', z') &= 0 \\ w'(x', z') &= w'_o(x') \end{aligned} \quad [5.5]$$

donde u'_o y w'_o son los desplazamientos según los ejes x' y z' , respectivamente, del punto O; $\theta_{x'}$ es el giro de la normal OA contenido en el plano local $x'z'$, y z' es la distancia OA. El vector de movimientos del punto A se define como:

$$\{u'\} = \{u'_o, w'_o, \theta_{x'}\}^T \quad [5.6]$$

1.3. Campo de deformaciones.

Las deformaciones en un punto se obtienen por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \\ \gamma_{x'z'} &= \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} = -\frac{dw'_o}{dx'} + \frac{dw'_o}{dx'} = 0 \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_{z'} = \gamma_{x'y'} = \gamma_{y'z'} = 0 \end{aligned} \quad [5.7]$$

Por tanto, el vector de deformaciones generalizadas se escribe:

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon_{x'}\} = \left\{ -\frac{du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right\} = \{-\varepsilon'_t - z' \cdot \varepsilon'_f\} \quad [5.8]$$

donde

$$\{\varepsilon'_t\} = \left\{ \frac{du'_o}{dx'} \right\}^T \quad [5.9a]$$

$$\{\varepsilon'_f\} = \left\{ \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right\}^T \quad [5.9b]$$

son los vectores³ de deformaciones generalizadas de tracción⁴ (alargamientos/acortamientos) y flexión (curvaturas).

³ Aunque en elementos de pórtico plano sean escalares, se mantiene la notación matricial para hacerla compatible y extensible a casos más generales.

⁴ En toda la bibliografía existente se refiere a este término como deformación de membrana, pero al analizarse los arcos planos como elementos unidimensionales, se ha considerado más oportuna esta denominación.

Se puede comprobar que no hay deformación por cortante, por lo que la deformación de un punto se obtiene sumando las deformaciones de barra a las de viga. El vector de deformaciones generalizadas de barra contiene la deformación longitudinal, y el vector de deformaciones generalizadas de flexión contiene la curvatura del eje del elemento.

1.4. Campo de tensiones.

La única tensión no nula $\sigma_{x'}$ se relaciona con su correspondiente deformación $\varepsilon_{x'}$ por:

$$\sigma_{x'} = E \cdot \varepsilon_{x'} = E \cdot \left(-\frac{du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d^2w'_o}{dx'^2} \right) \quad [5.10]$$

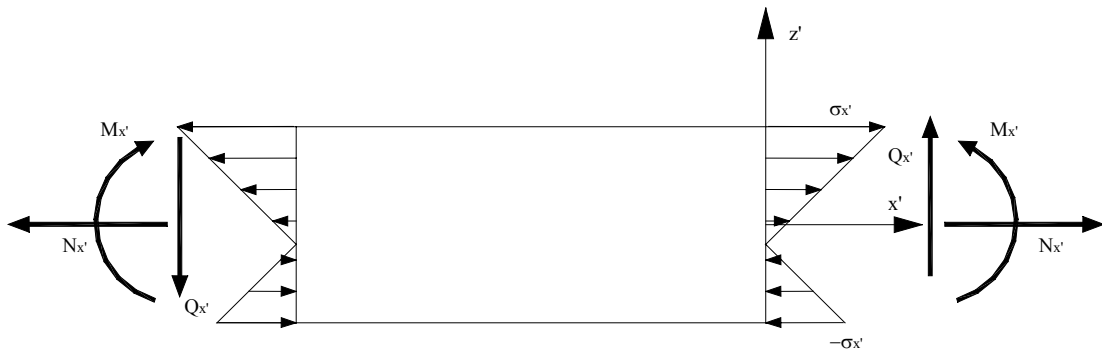


Figura 5.4. Convenio de signos para la tensión $\sigma_{x'}$, el momento flector $M_{x'}$, el esfuerzo axial $N_{x'}$ y el esfuerzo cortante $Q_{x'}$.

La variación de $\sigma_{x'}$ es lineal con el canto; $\frac{du'_o}{dx'}$ es constante para una sección dada y la curvatura del eje del elemento es función lineal de z' (figura 5.4).

1.5. Relaciones constitutivas.

El esfuerzo normal, en una sección cualquiera del elemento, se define:

$$N_{x'} = \iint_A \sigma_{x'} \cdot dA = E \cdot A \cdot \frac{du'_o}{dx'} \quad [5.11]$$

Del mismo modo, el momento flector queda determinado por:

$$M_{x'} = -\iint_A z' \cdot \sigma_{x'} \cdot dA = E \cdot I \cdot \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \quad [5.12]$$

Al ser la flecha pequeña, se puede simplificar la expresión general de la curvatura del eje χ del elemento, de modo que se puede escribir:

$$\chi = \frac{\frac{d^2 w'_o}{dx'^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \cong \frac{d^2 w'_o}{dx'^2}$$

por lo que la expresión del momento queda definida:

$$M_{x'} = E \cdot I \cdot \chi \quad [5.13]$$

Por lo que respecta al esfuerzo cortante, en puridad debería escribirse:

$$Q_{x'} = \iint_A \tau_{x'z'} \cdot dA = \iint_A G \cdot \gamma_{x'z'} \cdot dA \quad [5.14]$$

y como la deformación de cortante es nula, también debería ser nulo el esfuerzo cortante. Esta aparente deficiencia en el cálculo se resuelve determinando el esfuerzo cortante a partir de la expresión [5.3].

Así, el vector de esfuerzos locales queda definido por la expresión:

$$\{\hat{\sigma}'\} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ M_{x'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 \\ 0 & E \cdot I \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon'_t \\ \varepsilon'_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_t \\ \sigma'_f \end{Bmatrix} = [D'] \cdot \{\varepsilon'\} \quad [5.15]$$

donde σ'_t y σ'_f son los esfuerzos locales de tracción y flexión, y $[D']$ la matriz constitutiva del elemento.

1.6. Principio de los trabajos virtuales.

Sea el arco de la figura 5.2. Al igual que en el Capítulo anterior, se supone que las componentes de las fuerzas verticales puntuales y uniformemente distribuidas según los ejes globales originan componentes en x' y z' de sentidos negativos, mientras que las componentes de las fuerzas puntuales horizontales según los ejes generales de la estructura originan cargas puntuales positivas en el sentido x' y negativas en el z' . Del mismo modo, los momentos exteriores son positivos al coincidir su sentido con el positivo de giro.

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \varepsilon_{x'} \cdot \sigma_{x'} \cdot dV &= -\int_0^l \delta u'_o \cdot q_{x'} \cdot dx' - \int_0^l \delta w'_o \cdot q_{z'} \cdot dx' \\ &- \sum_{i=1}^p \delta u'_i \cdot X'_i - \sum_{j=1}^q \delta w'_j \cdot Z'_j + \sum_{k=1}^m \delta \theta'_k \cdot M'_k \end{aligned} \quad [5.16]$$

Introduciendo los valores de $\varepsilon_{x'}$ y de $\sigma_{x'}$ obtenidos en [5.7] y [5.10] en esta igualdad, se llega a:

$$\begin{aligned} \iiint_V \delta \varepsilon_{x'} \cdot \sigma_{x'} \cdot dV &= \iiint_V \left[\delta \left(\frac{-du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right) \cdot E \cdot \left(\frac{-du'_o}{dx'} - z' \cdot \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right) \right] \cdot dV = \\ &= \int_0^l \left[\delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot \iint_A E \cdot \frac{du'_o}{dx'} \cdot dA + \delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot E \cdot \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \cdot \iint_A z' \cdot dA + \right. \\ &\quad \left. \delta \left(\frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right) \cdot \frac{du'_o}{dx'} \cdot \iint_A z' \cdot dA + \delta \left(\frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right) \cdot E \cdot \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \cdot \iint_A (z')^2 \cdot dA \right] \cdot dx' = \\ &= \int_0^l \left[\delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot N_{x'} + \delta \left(\frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right) \cdot M_{x'} \right] \cdot dx' \end{aligned} \quad [5.17]$$

Por tanto, la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales [5.16] se puede enunciar del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\delta \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) \cdot E \cdot A \cdot \left(\frac{du'_o}{dx'} \right) + \delta \left(\frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right) \cdot E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2 w'_o}{dx'^2} \right) \right] \cdot dx' = \\ - \int_0^l \delta u'_o \cdot q_{x'} \cdot dx' - \int_0^l \delta w'_o \cdot q_{z'} \cdot dx' - \sum_{i=1}^p \delta u'_i \cdot X'_i - \sum_{j=1}^q \delta w'_j \cdot Z'_j + \sum_{k=1}^m \delta \theta'_k \cdot M'_k \end{aligned} \quad [5.18]$$

En esta ecuación se puede comprobar que en el integrando aparecen derivadas primeras del desplazamiento longitudinal u'_o y derivadas segundas de la flecha w'_o . Esto exige la continuidad de la flecha y de su derivada primera para garantizar la integrabilidad, así como la continuidad de la variable que representa el desplazamiento longitudinal, lo que exige la utilización de elementos finitos de clase C_1 .

2. Formulación de elementos finitos.

2.1. Discretización del campo de movimientos.

Se considera un elemento de pórtico plano de dos nodos, con tres grados de libertad por nodo (figura 5.5): el desplazamiento longitudinal u_{oi} , la

flecha w_{oi} y el giro $\left(\frac{dw_o}{dx}\right)_i$. Debido a que en la expresión del trabajo virtual interno obtenida en [5.18] aparecen segundas derivadas de la flecha, es necesario emplear elementos de continuidad de clase C_1 para evitar singularidades en el cálculo de las integrales. Por tanto, la función de interpolación de la flecha debe ser continua, así como su primera derivada.

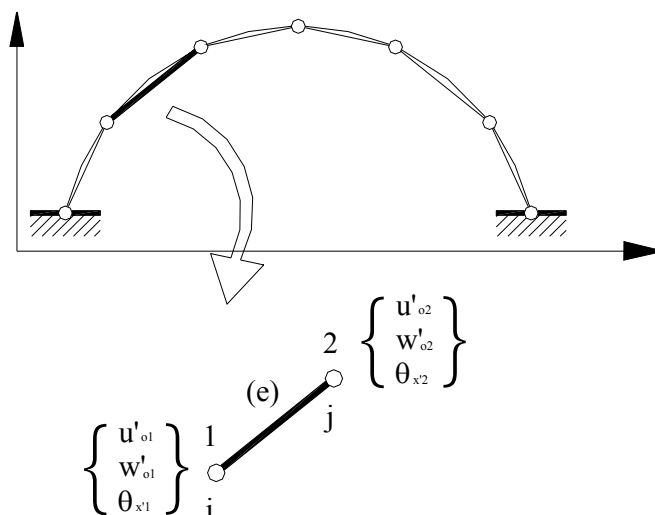


Figura 5.5. Elemento de pórtico plano de dos nodos.

El significado físico de esta condición de continuidad es fácil de intuir, pues $\left(\frac{dw_o}{dx}\right)_i$ coincide con la pendiente de la deformada del eje del elemento en el nodo i . Por tanto, dicha derivada debe ser continua para garantizar que la deformada del eje describa una curva suave.

Para obtener el campo de desplazamientos, se va a realizar una interpolación distinta para el desplazamiento longitudinal y para la flecha, de modo que para el desplazamiento longitudinal u se elige una variación, mientras que para interpolar la flecha w se emplea una variación cúbica. Así, se tiene^(*):

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 \cdot x \\ w &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3 \end{aligned} \quad [5.19]$$

(*) En lo que sigue, antes de llegar a la notación matricial, se prescinde de las primas que refieren las variables a coordenadas locales del elemento para facilitar la lectura de las expresiones.

Las constantes a_i , α_i se calculan sustituyendo los valores del desplazamiento longitudinal, de la flecha y sus derivadas en los nodos, de modo que se dispondrá de un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1 \cdot x_1 \\ w_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_1^2 + \alpha_3 \cdot x_1^3 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 &= \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \cdot x_1 + 3 \cdot \alpha_3 \cdot x_1^2 \\ u_2 &= a_0 + a_1 \cdot x_2 \\ w_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_2 + \alpha_2 \cdot x_2^2 + \alpha_3 \cdot x_2^3 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 &= \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 \cdot x_2 + 3 \cdot \alpha_3 \cdot x_2^2 \end{aligned}$$

Una vez resuelto el sistema anterior, las expresiones [5.19] pueden escribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} u(x) &= N_{u1} \cdot u_1 + N_{u2} \cdot u_2 \\ w(x) &= N_{w1} \cdot w_1 + N_{\theta 1} \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + N_{w2} \cdot w_2 + N_{\theta 2} \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \end{aligned} \quad [5.20]$$

donde (Goicolea, 2003):

$$\begin{aligned} N_{u1} &= 1 - \frac{x}{l^{(e)}} \\ N_{w1} &= 1 - 3 \cdot \frac{x^2}{l^{(e)2}} + 2 \cdot \frac{x^3}{l^{(e)3}} \\ N_{\theta 1} &= x \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{l^{(e)}} + \frac{x^2}{l^{(e)2}} \right) \\ N_{u2} &= \frac{x}{l^{(e)}} \\ N_{w2} &= \frac{x^2}{l^{(e)2}} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{x}{l^{(e)}} \right) \\ N_{\theta 2} &= \frac{x^2}{l^{(e)}} \cdot \left(\frac{x}{l^{(e)}} - 1 \right) \end{aligned} \quad [5.21]$$

Estas funciones de forma pueden escribirse en coordenadas naturales, con:

$$\xi = \frac{2 \cdot x}{l^{(e)}} - 1 \quad [5.22]$$

que varían entre -1 en el nodo i ($x=0$) y $+1$ en el nodo j ($x=l^{(e)}$), siendo $l^{(e)}$ la longitud del elemento. Las expresiones [5.20] quedan redefinidas por (Oñate, 1995):

$$\begin{aligned} u(\xi) &= N_{u1} \cdot u_1 + N_{u2} \cdot u_2 \\ w(\xi) &= N_{w1} \cdot w_1 + N_{\theta 1} \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + N_{w2} \cdot w_2 + N_{\theta 2} \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \end{aligned} \quad [5.23]$$

donde (Felippa, 2001a):

$$\begin{aligned} N_{u1} &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \\ N_{w1} &= \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi)^2 \cdot (2 + \xi) \\ N_{\theta 1} &= \frac{1}{8} \cdot l \cdot (1 - \xi)^2 \cdot (1 + \xi) \\ N_{u2} &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \\ N_{w2} &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi)^2 \cdot (2 - \xi) \\ N_{\theta 2} &= -\frac{1}{8} \cdot l \cdot (1 + \xi)^2 \cdot (1 - \xi) \end{aligned} \quad [5.24]$$

La aproximación de la flecha definida en [5.20] y [5.23] se denomina Hermítica, por coincidir las funciones de forma con polinomios de Hermite. La representación gráfica de las funciones de forma se muestra en la figura 5.6.

Respecto a las funciones de forma que discretizan la flecha (figura 5.6b), N_{w1} y N_{w2} valen la unidad en un nodo y cero en el opuesto, mientras que sus primeras derivadas son nulas en ambos nodos, sucediendo lo contrario con las funciones de forma $N_{\theta 1}$ y $N_{\theta 2}$.

En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} u' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{u1} & 0 & 0 & N_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{w1} & N_{\theta 1} & 0 & N_{w2} & N_{\theta 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u'_1 \\ w'_1 \\ \frac{dw'_1}{dx'} \\ u'_2 \\ w'_2 \\ \frac{dw'_2}{dx'} \end{Bmatrix} \quad [5.25]$$

o de manera abreviada:

$$\{u'\} = [N] \cdot \{a^{(e)}\} \quad [5.26]$$

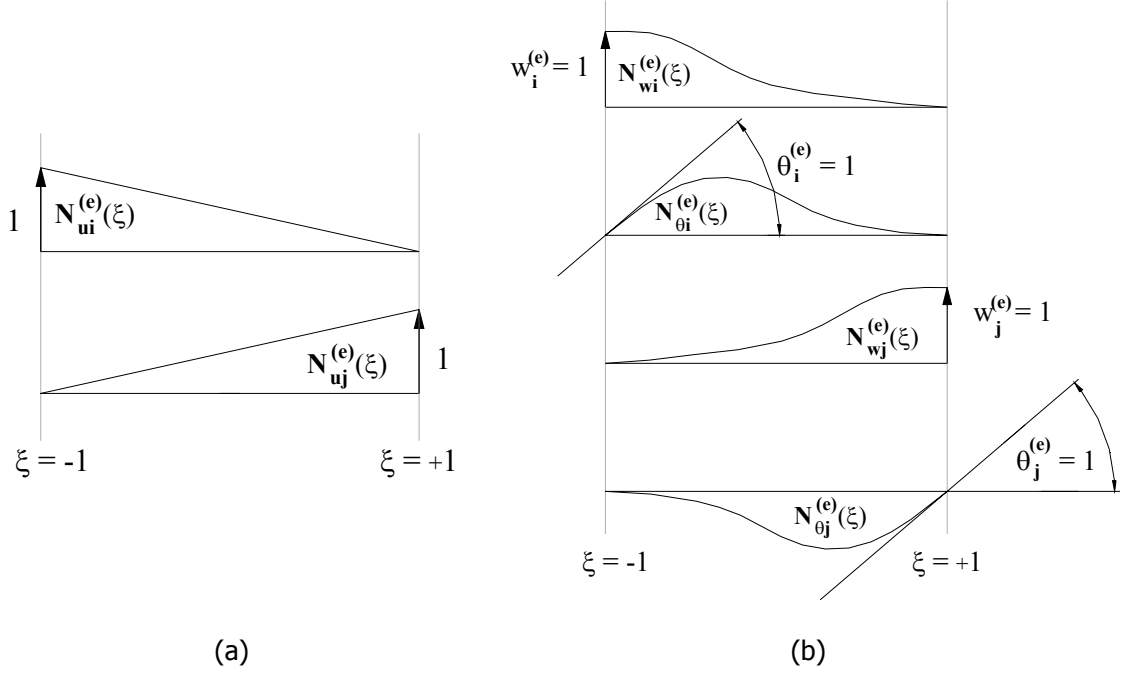


Figura 5.6. Funciones de forma del elemento de pórtico plano de Euler-Bernoulli.

2.2. Discretización del campo de deformaciones generalizadas.

El campo de deformaciones generalizadas se puede escribir como:

$$\{\varepsilon'\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{du'_o}{dx'} \\ \frac{d^2w'_o}{dx'^2} \end{array} \right\} \quad [5.27]$$

Teniendo en cuenta las interpolaciones utilizadas, al derivar se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{du'_o}{dx'} &= \frac{d\xi}{dx'} \cdot \left(\frac{dN_{u1}}{d\xi} \cdot u'_{o1} + \frac{dN_{u2}}{d\xi} \cdot u'_{o2} \right) \\ \frac{dw'_o}{dx'} &= \frac{d\xi}{dx'} \cdot \left(\frac{dN_{w1}}{d\xi} \cdot w'_{o1} + \frac{dN_{\theta1}}{d\xi} \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_1 + \frac{dN_{w2}}{d\xi} \cdot w'_{o2} + \frac{dN_{\theta2}}{d\xi} \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_2 \right) \\ \frac{d^2w'_o}{dx'^2} &= \left(\frac{d\xi}{dx'} \right)^2 \cdot \left(\frac{d^2N_{w1}}{d\xi^2} \cdot w'_{o1} + \frac{d^2N_{\theta1}}{d\xi^2} \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_1 + \frac{d^2N_{w2}}{d\xi^2} \cdot w'_{o2} + \frac{d^2N_{\theta2}}{d\xi^2} \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_2 \right) \end{aligned}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{du'_o}{dx'} &= \frac{2}{l^{(e)}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot u'_{o1} + \frac{1}{2} \cdot u'_{o2} \right) = \frac{-1}{l^{(e)}} \cdot u'_{o1} + \frac{1}{l^{(e)}} \cdot u'_{o2} \\ \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} &= \left(\frac{2}{l^{(e)}} \right)^2 \cdot \left[\frac{3 \cdot \xi}{2} \cdot w'_{o1} + \frac{1}{4} \cdot l^{(e)} \cdot (-1 + 3 \cdot \xi) \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_1 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 \cdot \xi}{2} \cdot w'_{o2} + \frac{1}{4} \cdot l^{(e)} \cdot (1 + 3 \cdot \xi) \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_2 \right] = \\ \frac{d^2 w'_o}{dx'^2} &= \left(\frac{6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} \cdot w'_{o1} + \frac{(-1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_1 + \frac{-6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} \cdot w'_{o2} + \frac{(1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} \cdot \left(\frac{dw'_o}{dx'} \right)_2 \right)\end{aligned}$$

Por tanto, en forma matricial el vector de deformaciones generalizadas puede escribirse:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_t \\ \varepsilon'_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B'_t] \\ [B'_f] \end{bmatrix} \cdot \{a^{(e)}\} = [B'] \cdot \{a^{(e)}\} \quad [5.28]$$

donde $[B'_t]$ y $[B'_f]$ son las matrices de deformación de tracción y flexión, quedando definidas por:

$$\begin{aligned}[B'_t] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [B'_f] &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} & \frac{(-1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} & 0 & \frac{-6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} & \frac{(1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} \end{bmatrix}\end{aligned} \quad [5.29]$$

2.3. Obtención de la matriz de rigidez local.

La expresión de los trabajos virtuales puede escribirse matricialmente, a partir de las relaciones deducidas en [5.15], [5.17], [5.18] y [5.28] como:

$$\int_0^l \{\delta \varepsilon'\}^T \cdot \{\hat{\sigma}'\} \cdot dx' = - \int_0^l \{\delta u'\}^T \cdot \{t'\} \cdot dx' + \{\delta a^{(e)}\} \cdot \{q^{(e)}\} \quad [5.30]$$

siendo $\{t'\}$ el vector de fuerzas distribuidas sobre el elemento y $\{q^{(e)}\}$ el vector de fuerzas nodales de equilibrio.

Tras operar haciendo uso de las relaciones estudiadas se llega a:

$$[K^{(e)}] \cdot \{a^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} = \{q^{(e)}\} \quad [5.31]$$

donde

$$[K^{(e)}] = \int_0^l [B']^T \cdot [D'] \cdot [B'] \cdot dx' \quad [5.32]$$

es la matriz de rigidez del elemento en ejes locales, y

$$\{f^{(e)}\} = \int_0^l [N]^T \cdot \{t\} \cdot dx' \quad [5.33]$$

es el vector de fuerzas nodales del elemento, también en ejes locales.

La expresión [5.32] se puede reescribir en función de las contribuciones de tracción y flexión, lo que permite simplificar su resolución numérica. Así,

$$[K^{(e)}] = \int_0^l \begin{bmatrix} [B'_t] & [B'_f] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \cdot A & 0 \\ 0 & E \cdot I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B'_t] \\ [B'_f] \end{bmatrix} \cdot dx' \quad [5.34]$$

De este modo,

$$[K^{(e)}] = [K_t^{(e)}] + [K_f^{(e)}] \quad [5.35]$$

siendo

$$\begin{aligned} [K_t^{(e)}] &= \int_0^l [B'_t]^T \cdot (E \cdot A) \cdot [B'_t] \cdot dx' \\ [K_f^{(e)}] &= \int_0^l [B'_f]^T \cdot (E \cdot I) \cdot [B'_f] \cdot dx' \end{aligned} \quad [5.36]$$

las matrices de rigidez correspondientes a los efectos de tracción y flexión.

Si se transforman estas integrales sobre el dominio normalizado del elemento, teniendo en cuenta la relación entre los sistemas de coordenadas por la que $dx' = \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi$, las ecuaciones [5.36] se convierten en:

$$\begin{aligned} [K_t^{(e)}] &= \int_{-1}^{+1} [B'_t]^T \cdot (E \cdot A) \cdot [B'_t] \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi \\ [K_f^{(e)}] &= \int_{-1}^{+1} [B'_f]^T \cdot (E \cdot I) \cdot [B'_f] \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi \end{aligned} \quad [5.37]$$

expresiones que pueden evaluarse numéricamente con una cuadratura unidimensional de Legendre-Gauss.

Comenzando por la expresión de la matriz de rigidez correspondiente al efecto de tracción $[K_t^{(e)}]$, se tiene:

$$[K_t^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{l^{(e)}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{l^{(e)}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (E \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{l^{(e)}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi$$

$$[K_t^{(e)}] = \left(\frac{E \cdot A}{l} \right)^{(e)} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot d\xi$$

Al ser todos los miembros del integrando constantes, sólo se exige un punto de integración, con $W_i=2$, con lo que al operar se obtiene:

$$[K_t^{(e)}] = \left(\frac{E \cdot A}{l} \right)^{(e)} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [5.38]$$

Del mismo modo, la expresión de la matriz de rigidez correspondiente al efecto de flexión $[K_f^{(e)}]$ es:

$$[K_f^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} \\ \frac{(-1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} \\ 0 \\ \frac{-6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} \\ \frac{(1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \cdot (E \cdot I) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} & \frac{(-1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} & 0 & \frac{-6 \cdot \xi}{(l^{(e)})^2} & \frac{(1 + 3 \cdot \xi)}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \cdot \frac{l^{(e)}}{2} \cdot d\xi$$

$$[K_f^{(e)}] = \left(\frac{E \cdot I}{l} \right)^{(e)} \cdot \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{18 \cdot \xi^2}{(l^{(e)})^2} & \frac{-3 \cdot \xi + 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} & 0 & \frac{-18 \cdot \xi^2}{(l^{(e)})^2} & \frac{3 \cdot \xi + 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} \\ 0 & \frac{-3 \cdot \xi + 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} & \frac{1 - 6 \cdot \xi + 9 \cdot \xi^2}{2} & 0 & \frac{3 \cdot \xi - 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} & \frac{-1 + 9 \cdot \xi^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-18 \cdot \xi^2}{(l^{(e)})^2} & \frac{3 \cdot \xi - 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} & 0 & \frac{18 \cdot \xi^2}{(l^{(e)})^2} & \frac{-3 \cdot \xi - 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} \\ 0 & \frac{3 \cdot \xi + 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} & \frac{-1 + 9 \cdot \xi^2}{2} & 0 & \frac{-3 \cdot \xi - 9 \cdot \xi^2}{l^{(e)}} & \frac{1 + 6 \cdot \xi + 9 \cdot \xi^2}{2} \end{bmatrix} \cdot d\xi$$

La integración exacta de la matriz de rigidez de flexión precisa dos puntos de integración por aparecer en el integrando de $[K_f^{(e)}]$ términos de segundo orden en ξ , obteniéndose:

$$[K_f^{(e)}] = \frac{E \cdot I}{(l^{(e)})^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \cdot l^{(e)} & 0 & -12 & 6 \cdot l^{(e)} \\ 0 & 6 \cdot l^{(e)} & 4 \cdot (l^{(e)})^2 & 0 & -6 \cdot l^{(e)} & 2 \cdot (l^{(e)})^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 \cdot l^{(e)} & 0 & 12 & -6 \cdot l^{(e)} \\ 0 & 6 \cdot l^{(e)} & 2 \cdot (l^{(e)})^2 & 0 & -6 \cdot l^{(e)} & 4 \cdot (l^{(e)})^2 \end{bmatrix} \quad [5.39]$$

De este modo, sumando las matrices [5.38] y [5.39] se obtiene la matriz de rigidez del elemento de pórtico plano en ejes locales, según la teoría de Euler-Bernoulli, y que es la expresión más utilizada en el cálculo matricial de estructuras obtenida a partir de las ecuaciones clásicas de Resistencia de Materiales (Argüelles, 1986; Vázquez, 1999; López Perales, 2003).

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} \\ \hline \text{sim.} & & & \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ & & & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} \end{bmatrix} \quad [5.40]$$

La coincidencia en la determinación de la matriz de rigidez por dos caminos distintos se debe a que la expresión polinómica de la flecha en el elemento hermitico de dos nodos es idéntica a la expresión que se determina al integrar la ecuación diferencial de equilibrio de una viga sometida a esfuerzos en sus extremos (Oñate, 1995).

Para comprobar la identidad de las expresiones, se va a estudiar la ecuación diferencial de equilibrio de un segmento de viga sobre el que no actúan cargas (figura 5.7).

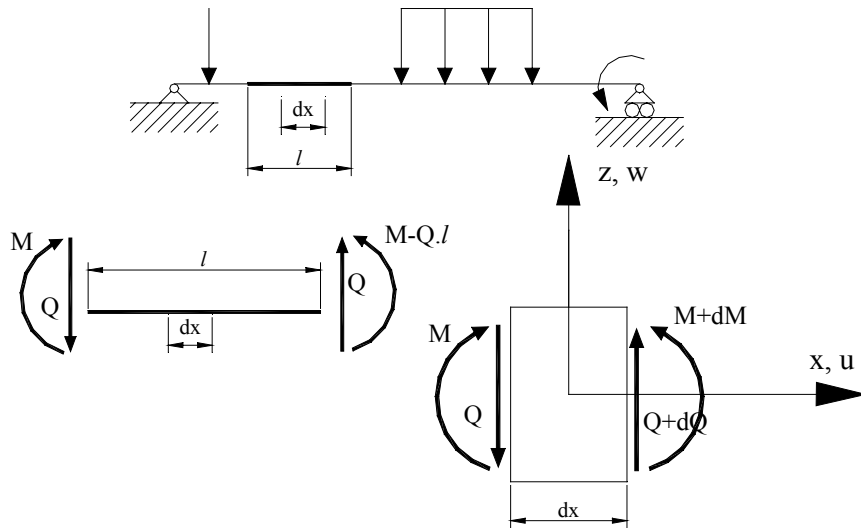


Figura 5.7. Esfuerzos en los extremos de un segmento de viga.

Si se considera una rebanada del segmento de viga sobre el que no actúan cargas, se pueden establecer las ecuaciones diferenciales de equilibrio a partir de las expresiones [5.1] a [5.3], de modo que:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad \frac{dM}{dx} + Q = 0 \quad [5.41]$$

Al satisfacerse la hipótesis de Euler-Bernoulli de que las secciones transversales permanecen planas durante la flexión, se verifica que ^(*):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{z}{\rho}$$

siendo ρ el radio de curvatura de la elástica. Cuando las deformaciones son pequeñas, la curvatura $1/\rho$ de la elástica equivale a $\frac{d^2w}{dx^2}$, por lo que

$$\varepsilon_x = z \cdot \frac{d^2w}{dx^2}$$

Por tanto,

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \cdot z$$

Considerando que el módulo de Young E y el momento de inercia de la sección I son constantes, de la relación entre solicitaciones y esfuerzos

$$M_x = \iint_A z \cdot \sigma_x \cdot dA = E \cdot I \cdot \frac{d^2w}{dx^2}$$

se deduce la ley de momentos flectores de la viga o ecuación diferencial de la elástica.

$$M_x = E \cdot I \cdot \frac{d^2w}{dx^2}$$

Derivando dos veces esta expresión, y haciendo uso de las relaciones recogidas en [5.41], se obtiene la ecuación diferencial de equilibrio del segmento de viga estudiado

$$\frac{d^4w}{dx^4} = 0$$

La solución de dicha ecuación es un polinomio cúbico en x ,

(*) Para facilitar la comprensión de las expresiones, se eliminan temporalmente las primas que distinguen las coordenadas locales de las globales, pues los conceptos expresados son independientes del sistema de referencia utilizado.

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3$$

en el que las constantes α_1 , α_2 , α_3 y α_4 se obtienen al analizar las condiciones de contorno del segmento de viga (figura 5.7). Así:

$$\begin{aligned} w &= w_1 & \frac{dw}{dx} &= \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 & \text{en } x=0 \\ w &= w_2 & \frac{dw}{dx} &= \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 & \text{en } x=l \end{aligned}$$

De este modo se tiene el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 &= \alpha_2 \\ w_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot l + \alpha_3 \cdot l^2 + \alpha_4 \cdot l^3 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 &= \alpha_2 \cdot l + 2 \cdot \alpha_3 \cdot l + 3 \cdot \alpha_4 \cdot l^2 \end{aligned}$$

que en forma matricial se escribe:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 \\ w_2 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot l & 3 \cdot l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se obtienen los valores de las constantes que proporcionan la expresión de la flecha:

$$w(x) = f_1(x) \cdot w_1 + f_2(x) \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + f_3(x) \cdot w_2 + f_4(x) \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)_2$$

donde

$$f_1(x) = 1 - 3 \cdot \frac{x^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{l^3}$$

$$f_2(x) = x \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$f_3(x) = \frac{x^2}{l^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{x}{l} \right)$$

$$f_4(x) = \frac{x^2}{l} \cdot \left(\frac{x}{l} - 1 \right)$$

que coinciden con las funciones de forma hermíticas N_{w1} , $N_{\theta 1}$, N_{w2} y $N_{\theta 2}$ obtenidas en [5.21], empleadas en la interpolación de la flecha.

2.4. Matriz de rigidez global y ensamblaje de ecuaciones.

Con independencia de la hipótesis adoptada para establecer el modelo de elementos finitos, se tendrá que proceder de idéntica manera a como se ha descrito en los apartados (3.5) y (3.6) del Capítulo 4 para la obtención de la ecuación matricial del arco en coordenadas globales, que adoptará la conocida forma genérica

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad [5.42]$$

Así, para poder realizar el ensamblaje de las ecuaciones matriciales de los elementos de pórtico plano en los que se discretiza el arco y de las fuerzas que sobre ellos actúan es necesario referir todas las expresiones a unos ejes generales x , z . Posteriormente, la expresión del equilibrio del arco definida por [5.42] se consigue al igualar las fuerzas internas que concurren en un nodo con la fuerza exterior que actúa sobre él.

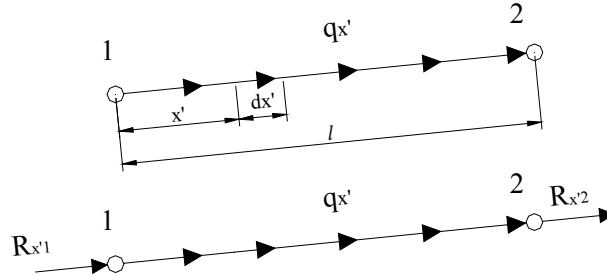
2.5. Obtención del vector de fuerzas equivalentes.

En principio, para la determinación del vector de fuerzas equivalentes se van a estudiar los principales tipos de fuerza que pueden actuar sobre la estructura arco, imaginando en un primer momento que el sentido de las fuerzas será el positivo según los ejes locales del elemento finito sobre el que actúan. Para su obtención se va a seguir la metodología de Vázquez y López (2001).

2.5.1. Carga uniformemente distribuida $q_{x'}$.

Se considera un elemento de pórtico plano sobre el que actúa una carga longitudinal cualquiera $q_{x'}$ distribuida por unidad de longitud (figura 5.8). El vector de fuerzas nodales equivalente a la carga distribuida viene definido por la expresión [5.33]:

$$\{f^{(e)}\} = \int_0^l [N]^T \cdot \{t\} \cdot dx'$$

Figura 5.8. Carga uniformemente distribuida $q_{x'}$.

Sustituyendo los valores de las variables, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \int_0^l \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & 1 - 3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x'^3}{l^3} \\ 0 & x' \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x'}{l} + \frac{x'^2}{l^2} \right) \\ \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & \frac{x'^2}{l^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{x'}{l} \right) \\ 0 & \frac{x'^2}{l} \cdot \left(\frac{x'}{l} - 1 \right) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{x'} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot dx'$$

y operando

$$\{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^l q_{x'} \cdot \left(1 - \frac{x'}{l} \right) \cdot dx' \\ 0 \\ 0 \\ \int_0^l q_{x'} \cdot \frac{x'}{l} \cdot dx' \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_{x'} \cdot l}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{q_{x'} \cdot l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [5.43]$$

Si la carga no estuviera distribuida en toda la longitud, bastaría con introducir en [5.43] el intervalo de aplicación (a, b) como los límites de integración para determinar el vector de fuerzas equivalentes.

2.5.2. Carga uniformemente distribuida $q_{z'}$.

Ahora se considera un elemento de pórtico plano sobre el que actúa una carga transversal cualquiera $q_{z'}$ distribuida por unidad de longitud (figura 5.9), de sentido positivo.

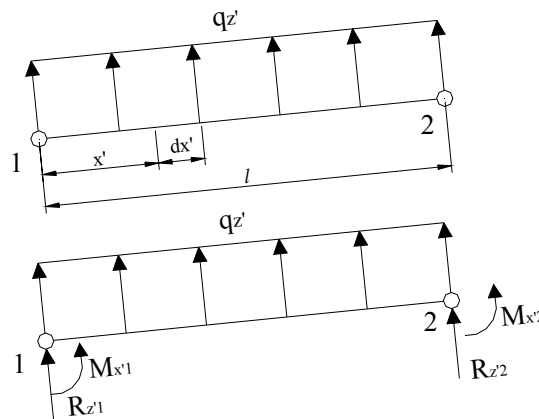


Figura 5.9. Carga uniformemente distribuida $q_{z'}$.

Sustituyendo los valores de las variables en [5.33], se tiene:

$$\begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & 1 - 3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x'^3}{l^3} \\ 0 & x \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x'}{l} + \frac{x'^2}{l^2} \right) \\ \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & \frac{x'^2}{l^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{x'}{l} \right) \\ 0 & \frac{x'^2}{l} \cdot \left(\frac{x'}{l} - 1 \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ q_{z'} \end{Bmatrix} \cdot dx'$$

y operando

$$\{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \int_0^l q_{z'} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x'^3}{l^3}\right) \cdot dx' \\ \int_0^l q_{z'} \cdot \left(x - 2 \cdot \frac{x'^2}{l} + \frac{x'^3}{l^2}\right) \cdot dx' \\ 0 \\ \int_0^l q_{z'} \cdot \left(3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{x'^3}{l^3}\right) \cdot dx' \\ \int_0^l q_{z'} \cdot \left(\frac{x'^3}{l^2} - \frac{x'^2}{l}\right) \cdot dx' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{q_{z'} \cdot l}{2} \\ \frac{q_{z'} \cdot l^2}{12} \\ 0 \\ \frac{q_{z'} \cdot l}{2} \\ -\frac{q_{z'} \cdot l^2}{12} \end{Bmatrix} \quad [5.44]$$

Al igual que en el caso de la carga longitudinal, si la carga transversal $q_{z'}$ no estuviera distribuida en toda la longitud del elemento se deberían modificar los límites de integración de [5.44] en función del intervalo de aplicación (a, b) de la carga.

2.5.3. Carga concentrada $P_{x'}$.

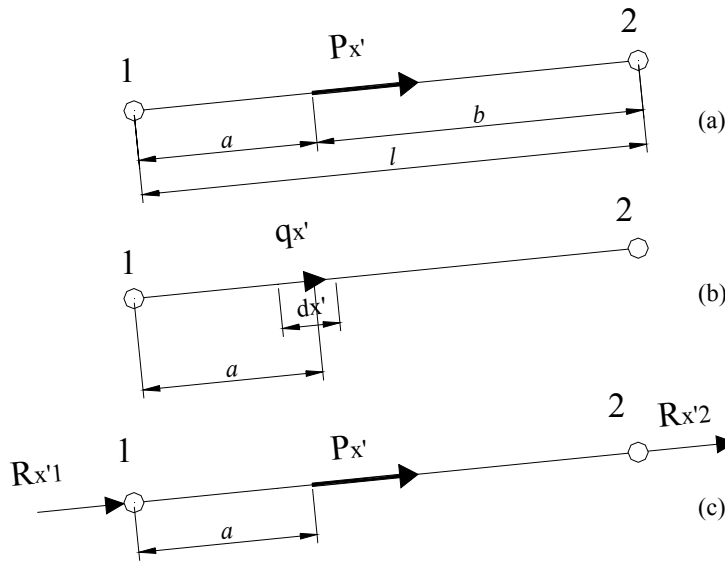


Figura 5.10. Carga concentrada $P_{x'}$.

En este caso el elemento de pórtico plano está sometido a una carga concentrada $P_{x'}$ (figura 5.10). Esta carga puede considerarse como la resultante de una carga distribuida $q_{x'}$ sobre una longitud de elemento dx' , tal que $P_{x'} = q_{x'} \cdot dx'$ (Vázquez y López, 2001).

Al realizar la integración a lo largo de todo el elemento, el producto $q_{x'} \cdot dx'$ es igual a la carga concentrada $P_{x'}$ únicamente para el punto $x=a$, siendo nulo en los restantes puntos del elemento, lo que significa que

$$\{f^{(e)}\} = \int_0^l [N]^T \cdot \{t'\} \cdot dx' = [N]_{x'=a}^T \cdot \{t'\}$$

Numéricamente:

$$\begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & 1 - 3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x'^3}{l^3} \\ 0 & x' \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x'}{l} + \frac{x'^2}{l^2} \right) \\ \hline \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & \frac{x'^2}{l^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{x'}{l} \right) \\ 0 & \frac{x'^2}{l} \cdot \left(\frac{x'}{l} - 1 \right) \end{bmatrix}_{x'=a} \cdot \begin{Bmatrix} P_{x'} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y al operar se obtiene:

$$\{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{x'} \cdot \left(1 - \frac{a}{l} \right) \\ 0 \\ 0 \\ \hline P_{x'} \cdot \frac{a}{l} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P_{x'} \cdot b}{l} \\ 0 \\ 0 \\ \hline \frac{P_{x'} \cdot a}{l} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [5.45]$$

Si la carga puntual estuviese aplicada en el punto medio del elemento, el vector de fuerzas nodales equivalente valdría:

$$\{f^{(e)}\} = \left\{ \frac{P_{x'}}{2} \quad 0 \quad 0 \quad \middle| \quad \frac{P_{x'}}{2} \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad [5.46]$$

2.5.4. Carga concentrada $P_{z'}$.

En este caso, el elemento está sometido a una carga puntual $P_{z'}$ positiva en un punto intermedio genérico (figura 5.11).

Al igual que en el apartado anterior, se considera esta carga puntual $P_{z'}$ como la resultante de una carga distribuida $q_{z'}$ sobre una longitud dx' de elemento, tal que $P_{z'} = q_{z'} \cdot dx'$.

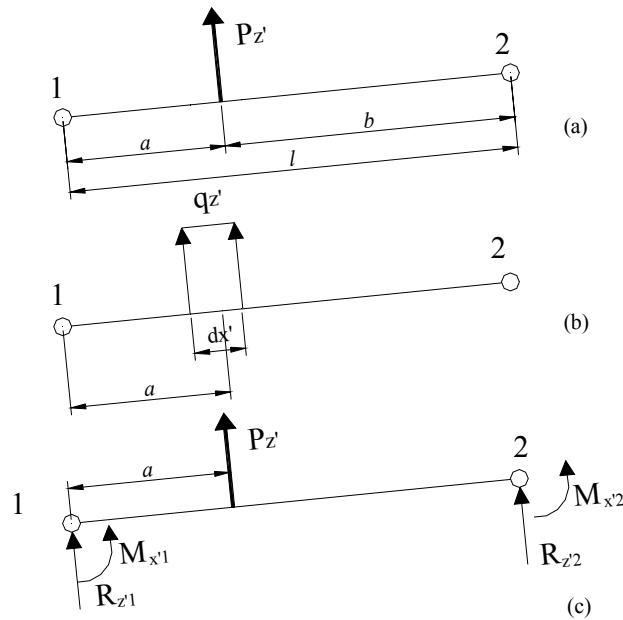


Figura 5.11. Carga concentrada $P_{z'}$.

Actuando de forma análoga a como se hizo en el apartado anterior, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & 1 - 3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{x'^3}{l^3} \\ 0 & x' \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{x'}{l} + \frac{x'^2}{l^2} \right) \\ \frac{x'}{l} & 0 \\ 0 & \frac{x'^2}{l^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{x'}{l} \right) \\ 0 & \frac{x'^2}{l} \cdot \left(\frac{x'}{l} - 1 \right) \end{bmatrix}_{x'=a} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{z'} \end{Bmatrix}$$

y al realizar las operaciones matemáticas se obtiene:

$$\{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{z'} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{a^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{a^3}{l^3}\right) \\ P_{z'} \cdot \left(a - 2 \cdot \frac{a^2}{l} + \frac{a^3}{l^2}\right) \\ 0 \\ P_{z'} \cdot \left(3 \cdot \frac{a^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{a^3}{l^3}\right) \\ P_{z'} \cdot \left(\frac{a^3}{l^2} - \frac{a^2}{l}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{z'} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{a^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{a^3}{l^3}\right) \\ \frac{P_{z'} \cdot a \cdot b^2}{l^2} \\ 0 \\ P_{z'} \cdot \left(3 \cdot \frac{a^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{a^3}{l^3}\right) \\ -\frac{P_{z'} \cdot a^2 \cdot b}{l^2} \end{Bmatrix} \quad [5.47]$$

Si la carga puntual estuviese aplicada en el punto medio del elemento, entonces el vector de fuerzas nodales equivalente tomaría el valor:

$$\{f^{(e)}\} = \left\{ 0 \quad \frac{P_{z'}}{2} \quad \frac{P_{z'} \cdot l}{8} \quad 0 \quad \frac{P_{z'}}{2} \quad -\frac{P_{z'} \cdot l}{8} \right\}^T \quad [5.48]$$

2.5.5. Par concentrado $M_{x'}$.

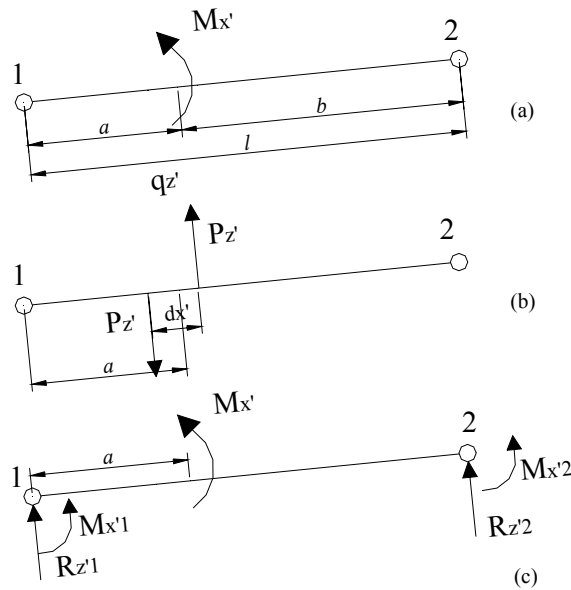


Figura 5.12. Par concentrado $M_{x'}$.

Por último, se considera que sobre el elemento de pórtico plano actúa el par concentrado de momento $M_{x'}$ (figura 5.12). Este par se puede sustituir por dos cargas puntuales $P_{z'}$ iguales y de sentidos opuestos, separadas una longitud diferencial dx' , tal que $M_{x'} = P_{z'} \cdot dx'$.

Realizando la analogía con el caso anterior, se tiene:

$$\{f^{(e)}\} = \int_0^l [N]^T \cdot \{t'\} \cdot dx' = [N]_{x'=a+dx'}^T \cdot P_{z'} - [N]_{x'=a}^T \cdot P_{z'}$$

O sea:

$$\{f^{(e)}\} = \int_0^l [N]^T \cdot \{t'\} \cdot dx' = \left(\frac{M_{x'}}{dx'} \right) \cdot [dN]_{x'=a}^T = M_{x'} \cdot \left[\frac{dN}{dx'} \right]_{x'=a}^T$$

Numéricamente:

$$\begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -6 \cdot \frac{x'}{l^2} + 6 \cdot \frac{x'^2}{l^3} \\ 0 & \left(1 - 4 \cdot \frac{x'}{l} + 3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} \right) \\ \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & \left(6 \cdot \frac{x'}{l^2} - 6 \cdot \frac{x'^2}{l^3} \right) \\ 0 & \left(3 \cdot \frac{x'^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{x'}{l} \right) \end{bmatrix}_{x'=a} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ M_{x'} \end{Bmatrix}$$

y al operar se obtiene:

$$\{f^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} R_{x'1} \\ R_{z'1} \\ M_{x'1} \\ R_{x'2} \\ R_{z'2} \\ M_{x'2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x'} \cdot \left(-6 \cdot \frac{a}{l^2} + 6 \cdot \frac{a^2}{l^3} \right) \\ M_{x'} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{a}{l} + 3 \cdot \frac{a^2}{l^2} \right) \\ 0 \\ M_{x'} \cdot \left(6 \cdot \frac{a}{l^2} - 6 \cdot \frac{a^2}{l^3} \right) \\ M_{x'} \cdot \left(3 \cdot \frac{a^2}{l^2} - 2 \cdot \frac{a}{l} \right) \end{Bmatrix} \quad [5.49]$$

Si momento estuviese aplicado en el punto medio del elemento, el vector de fuerzas nodales equivalente valdría:

$$\{f^{(e)}\} = \left\{ 0 \quad -\frac{3 \cdot M_{x'}}{2 \cdot l} \quad -\frac{M_{x'}}{4} \mid 0 \quad \frac{3 \cdot M_{x'}}{2 \cdot l} \quad -\frac{M_{x'}}{4} \right\}^T \quad [5.50]$$

En los valores del vector de fuerzas nodales equivalente se puede observar que los resultados obtenidos son iguales y de sentido contrario a las reacciones de empotramiento, es decir, iguales a las acciones sobre los empotramientos, que son las acciones que el elemento, supuestamente empotrado en sus extremos, ejerce sobre los empotramientos.

Capítulo 6

Pandeo de arcos.

1. Introducción	171
2. Métodos simplificados.....	172
2.1. Reglas CB-71 para cálculo de arcos biarticulados	173
2.2. Norma DIN-1052 para cálculo de arcos articulados.....	173
3. Arcos circulares sometidos a presión radial uniforme	174
3.1. Arcos biarticulados	177
3.2. Arcos biempotrados.....	179
4. Arcos con carga vertical y directriz parabólica	180
5. Método matricial.....	183
5.1. Bifurcación de equilibrio.....	183
5.2. Hipótesis de cálculo	185
5.3. Determinación de la carga crítica	186
5.4. Matriz de rigidez geométrica	188
5.3.1. Obtención de las formas modales de deformación	191
5.3.2. Obtención de los coeficientes de rigidez geométrica en coordenadas locales.....	197
5.5. Ecuación matricial, coeficiente crítico y forma modal de pandeo.....	201
5.6. Procedimiento operativo.....	202
6. Análisis de pandeo no lineal	203
6.1. Solución del problema	205
6.2. Procedimiento de Newton Raphson.....	207
6.3. Obtención de la solución no lineal con ANSYS	210

Capítulo 6

Pandeo de arcos.

1. Introducción.

A la hora de profundizar en el estudio del fenómeno del pandeo en los arcos, se pueden encontrar dos tendencias claramente diferenciadas. Una primera que se centra en casos particulares de arcos, combinando una directriz determinada con un tipo de apoyos y de cargas. Así, por su interés y aplicación en la edificación agroindustrial se desarrollará el pandeo de arcos con directriz circular, sección constante y extremos articulados y empotrados, tal y como desarrollan Cudós (1978) y Argüelles (1996). También se analizarán arcos con cargas verticales y directriz parabólica, de acuerdo con la sistemática propuesta por Argüelles (1996).

La segunda tendencia, que está muy ligada al modo de discretizar el arco en segmentos rectos, es considerar al arco como un sistema plano de barras y, por tanto, la obtención del coeficiente crítico de pandeo se realizará como en el caso más general de estructuras reticulares.

Así, se dice que un arco pandea cuando en un incremento continuo de cargas se produce una deformación brusca sin haber llegado en ningún punto a la tensión de rotura, considerando un régimen elástico y un módulo de elasticidad constante.

Como consecuencia del pandeo puede producirse o no el colapso, pero lo fundamental es que en un determinado escalón de carga la estructura ha tomado una configuración distinta a la explicada por la ley de Hooke en la teoría lineal de la elasticidad.

En otras palabras, y dejando entrever el enfoque matemático del problema, se puede afirmar que un arco alcanzará el pandeo para la menor carga, llamada crítica, que haga las ecuaciones de equilibrio indeterminadas.

Existe una gran cantidad de métodos de cálculo para resolver el problema del pandeo. Unos exactos, que son particularizaciones del método matricial. En el método matricial se plantea la matriz de rigidez del arco, incluyendo los efectos secundarios provocados por la existencia del esfuerzo axial. El análisis riguroso del pandeo teórico es siempre posible por este procedimiento, pero es tan costoso que obliga a grandes simplificaciones en los proyectos ordinarios. Por ello se utilizan métodos aproximados (Escrig, 1985).

Si se considera que una estructura pandea cuando lo hace el elemento más débil, el análisis del pandeo se puede reducir al de cada uno de sus elementos comprimidos. Como la interacción entre las distintas barras de la estructura disminuye con el alejamiento de las mismas, se pueden utilizar con suficiente grado de aproximación modelos simplificados que tengan en cuenta únicamente las barras concurrentes en los nudos de la pieza objeto de estudio, despreciando la influencia de las demás (Cudós y Quintero, 1988). Basándose en esta realidad, las distintas Normas simplifican los cálculos y sustituyen la verificación del pandeo global de las estructuras por el análisis del pandeo de cada barra por separado mediante métodos aproximados (Garcimartín, 1998).

Sin embargo, no es posible la generalización de los métodos simplificados utilizados en estructuras reticuladas planas al caso de los arcos, puesto que entre los elementos en los que se discretiza un arco sólo existe una conexión lineal, entre un elemento y el siguiente, sin posibilidad de uniones entre elementos no contiguos, al igual que sucede en los pórticos a dos aguas empleados de forma generalizada en la edificación agroindustrial. Por ello, no se podrán usar formulaciones simplificadas derivadas de las experiencias de Julian y Lawrence, Wood, ni en las de Jackson y Moreland, que sirven de base a las normativas NBE EA-95, Eurocódigo EC-3 y EHE, respectivamente (López Perales, 2003).

Por todo ello se estudiará en profundidad el pandeo global del arco utilizando métodos matriciales, partiendo del concepto de la bifurcación de equilibrio y obteniendo la matriz de rigidez geométrica del arco.

En último lugar se realizará un análisis de pandeo no lineal, para lo cual será necesario determinar la matriz de rigidez tangente total, en el caso general de que la matriz de grandes deformaciones no sea nula, como lleva implícito el método basado en el cálculo de autovalores. Esto se realizará empleando métodos de cálculo por incrementos sucesivos, como el de Newton-Raphson, aprovechando la potencia de cálculo de la aplicación informática ANSYS, auténtico referente comercial dentro del campo de los elementos finitos.

2. Métodos simplificados.

En la figura 6.1 se muestra el modo de pandeo de un arco biarticulado de luz l y flecha f sometido a una carga uniforme q . Se puede comprobar como el pandeo manifiesta un desplazamiento simétrico de la deformada respecto a su posición original.

2.1. Reglas CB-71 para cálculo de arcos biarticulados.

Las Reglas CB-71 definen la longitud eficaz l_{ef} de pandeo en arcos biarticulados de sección constante mediante la expresión:

$$l_{ef} = 0.5 \cdot \sqrt{l^2 + 6.15 \cdot f^2} \quad [6.1]$$

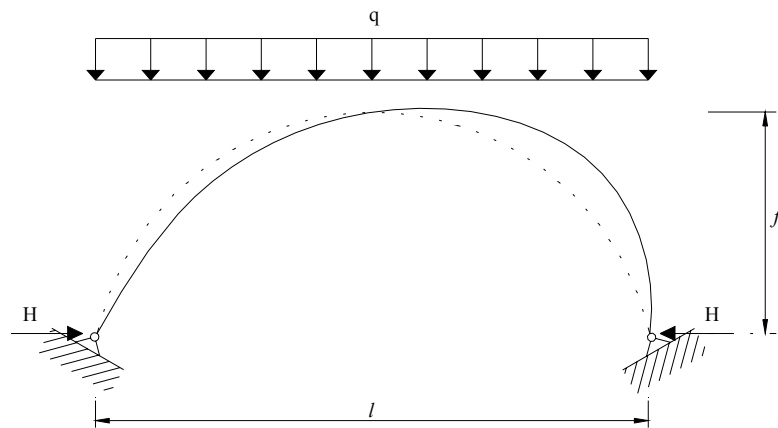


Figura 6.1. Pandeo de arcos biarticulados

Según esta norma, la carga crítica de pandeo viene dada por la expresión aproximada:

$$N_{cr} \cong \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [6.2]$$

donde s es la longitud del arco.

2.2. Norma DIN 1052 para cálculo de arcos articulados.

La norma DIN 1052 define, también para arcos de sección constante, la longitud eficaz l_{ef} de pandeo en arcos articulados mediante la expresión:

$$l_{ef} = 1.25 \cdot \left(\frac{s}{2}\right) \quad [6.3]$$

Esta definición es válida para arcos articulados, sin distinguir entre bi o triarticulados, con un rebajamiento $\frac{f}{l}$ que cumplen la relación:

$$0.15 \leq \frac{f}{l} \leq 0.50$$

Para mayor precisión se puede emplear la expresión:

$$l_{ef} = \beta \cdot l \quad [6.4]$$

donde l es la luz del arco y β un coeficiente que depende del tipo de arco y del rebajamiento. Sus valores se reflejan en la tabla 6.1.

Tabla 6.1. Valores del coeficiente β en arcos biarticulados y triarticulados para distintos rebajamientos (Argüelles y col, 2000).		
$\frac{f}{l}$	Arcos biarticulados	Arcos triarticulados
0.10	0.52	0.59
0.20	0.57	0.61
0.30	0.66	0.66
0.40	0.75	0.75
0.50	0.85	0.85

3. Arcos circulares sometidos a presión radial uniforme.

Un arco de directriz circular y sección constante, característico de una estructura de cubierta, pandea por efecto de una carga radial q , adoptando la configuración que se muestra en la figura 6.2.

Para determinar el valor de la carga crítica de pandeo, que es el mínimo necesario para mantener el equilibrio de la posición deformada, resulta conveniente determinar la elástica del arco circular flectado en su plano de pandeo.

Sea R el radio del arco antes de la deformación. Si se denomina r al radio de curvatura de un punto cualquiera D_1 después de la deformación, y M el momento que aparece en esa sección, se tiene:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = -\frac{M}{E \cdot I} \quad [6.5]$$

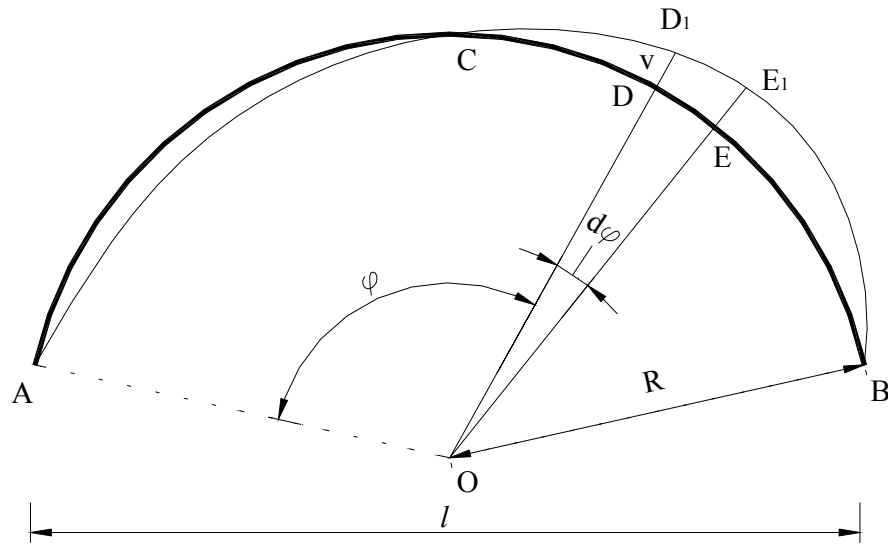


Figura 6.2. Pandeo de un arco circular sometido a presión radial uniforme.

Para determinar la expresión de la elástica, se deberá encontrar la expresión de r en función de las deformaciones.

El punto del arco D, en su deformación hasta alcanzar la posición D_1 , tendrá un desplazamiento definido por su corrimiento v en dirección radial y su componente u en dirección tangencial.

Se hace uso de la hipótesis de Rayleigh, por la que el desplazamiento tangencial u es despreciable ($u = 0$).

Antes de la deformación (figura 6.3), las tangentes en dos puntos D y E del arco, separados una distancia infinitesimal ds , forman un ángulo $d\varphi$, de manera que:

$$ds = R \cdot d\varphi$$

Después de la deformación, las tangentes en D_1 y E_1 forman el ángulo $d\varphi + \Delta d\varphi$, y la longitud D_1E_1 vale $ds + \Delta ds$, por lo que se tiene:

$$ds + \Delta ds = r \cdot (d\varphi + \Delta d\varphi) \quad [6.6]$$

El valor de $\Delta d\varphi$ es la diferencia entre los ángulos β y α formados por las tangentes en E_1 y D_1 y las normales a los radios:

$$\alpha = \frac{dv}{ds}$$

$$\beta = \frac{dv}{ds} + \frac{d^2v}{ds^2} \cdot ds$$

luego,

$$\Delta d\varphi = \frac{d^2v}{ds^2} \cdot ds$$

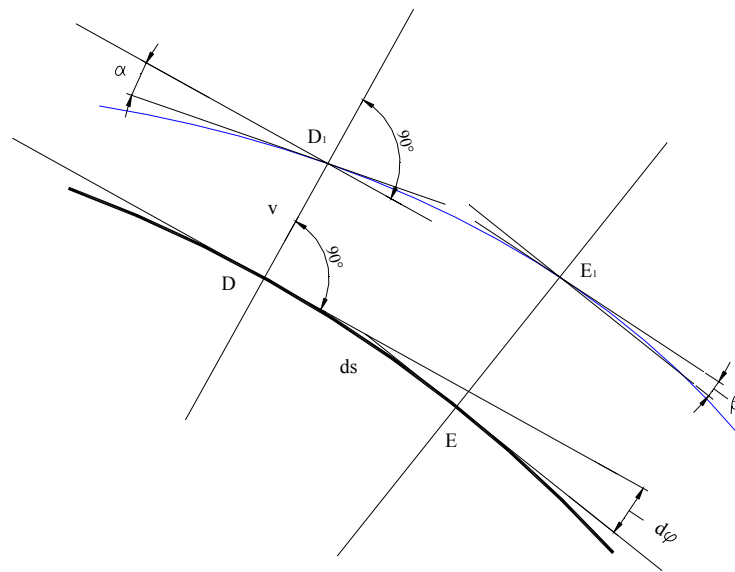


Figura 6.3. Construcciones geométricas para analizar el pandeo en un tramo infinitesimal.

Por otra parte, la longitud D_1E_1 vale:

$$ds + \Delta ds = (R - v) \cdot d\varphi$$

Sustituyendo estas expresiones en [6.6] se tiene:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi + \frac{d^2v}{ds^2} \cdot ds}{\left(1 - \frac{v}{R}\right) \cdot ds}$$

Multiplicando numerador y denominador por $1 + \frac{v}{R}$, y despreciando los infinitésimos de segundo orden, se tiene:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cdot \left(1 + \frac{v}{R}\right) + \frac{d^2 v}{ds^2} \quad [6.7]$$

Sustituyendo esta expresión [6.7] en [6.5], se obtiene la expresión de la elástica buscada:

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = -\frac{M \cdot R^2}{E \cdot I} \quad [6.8]$$

3.1. Arcos biarticulados.

La compresión axial del arco N será:

$$N = q \cdot R$$

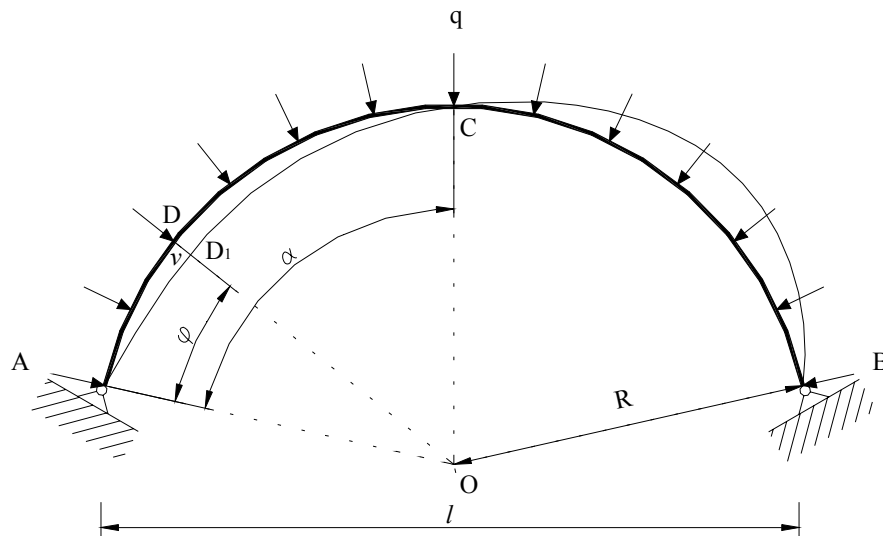


Figura 6.4. Pandeo de arcos circulares biarticulados sometidos a presión radial uniforme.

En la figura 6.4 se muestra la deformada por pandeo con un trazo más fino que la línea que marca la geometría original del arco. El momento en un punto cualquiera D_1 de la deformada de pandeo será:

$$M = -N \cdot v$$

Aplicando la ecuación [6.8] se tiene:

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + v = -\frac{N \cdot v \cdot R^2}{E \cdot I} \quad [6.9]$$

Si se realiza el cambio de variables:

$$K^2 = 1 + \frac{q \cdot R^3}{E \cdot I} \quad [6.10]$$

la ecuación [6.9] se escribe de la forma:

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + K^2 \cdot v = 0 \quad [6.11]$$

La solución de la ecuación [6.11] es:

$$v = A \cdot \text{sen}(K \cdot \varphi) + B \cdot \text{cos}(K \cdot \varphi)$$

y las condiciones de los apoyos se convierten en:

- para $\varphi = 0$, $v = 0$, luego

$$B=0$$

- para $\varphi = 2 \cdot \alpha$, debe ser $v = 0$, luego

$$\text{sen}(2 \cdot K \cdot \alpha) = 0$$

La menor solución que cumple esta expresión es:

$$K = \frac{\pi}{\alpha}$$

que sustituida en la ecuación [6.10] da como valor la carga crítica radial:

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)$$

El valor del esfuerzo axial crítico o carga crítica de pandeo, por tanto, será:

$$N_{cr} = q_{cr} \cdot R = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad [6.12]$$

Para este valor de la carga crítica, el empuje crítico vale (figura 6.5):

$$H_{cr} = N_{cr} \cdot R \cdot \cos \alpha = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \cdot \cos \alpha$$

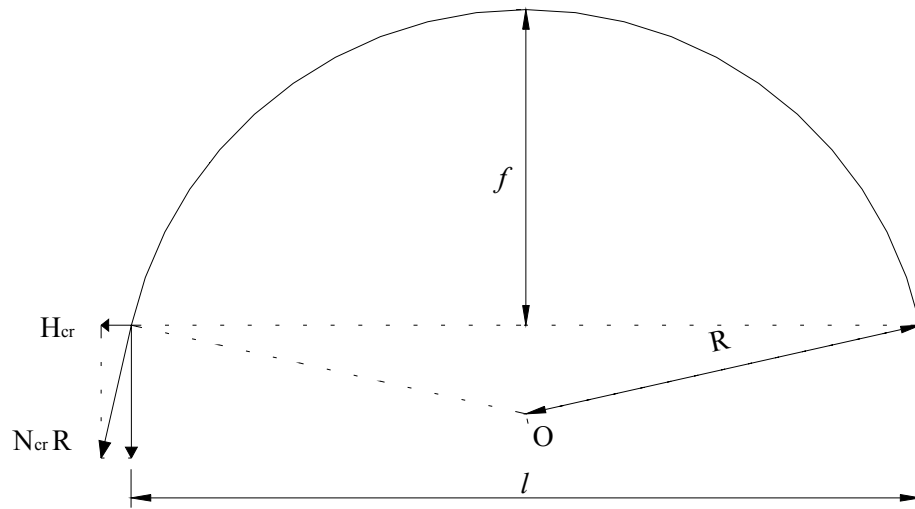


Figura 6.5. Empuje crítico en un arco.

Si el ángulo α es pequeño puede despreciarse el término 1 respecto a $\frac{\pi^2}{\alpha^2}$, con lo que la expresión [6.12] se puede escribir (Argüelles, 1996):

$$N_{cr} = q_{cr} \cdot R \cong \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [6.13]$$

siendo s la longitud del arco. Esta expresión es de gran analogía con la fórmula de Euler, sin más que sustituir l por $s/2$.

3.2. Arcos biempotrados.

En este caso, en los extremos A y B, aparecerán momentos flectores y giros nulos (figura 6.6). En la clave C, por ser un punto de inflexión se anulará el momento, pero no el esfuerzo cortante Q .

Planteando la ecuación diferencial de manera similar al caso anterior, y aplicando las ecuaciones de condición correspondiente, se obtiene un sistema

homogéneo de ecuaciones para el que la eliminación del determinante de sus coeficientes proporciona la ecuación básica:

$$\operatorname{tg}(K \cdot \alpha) = K \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Dado α , el valor más pequeño de K que satisface esta ecuación permite determinar la carga crítica radial:

$$q_{cr} = (K^2 - 1) \cdot \frac{E \cdot I}{R^3} \quad [6.14]$$

Nicolai proporciona los siguientes valores de K en función de la semiapertura α :

Tabla 6.2. Valores de K para determinar la carga crítica radial (Cudós, 1978).						
α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	8.621	4.375	3.000	2.364	2.066	2.000

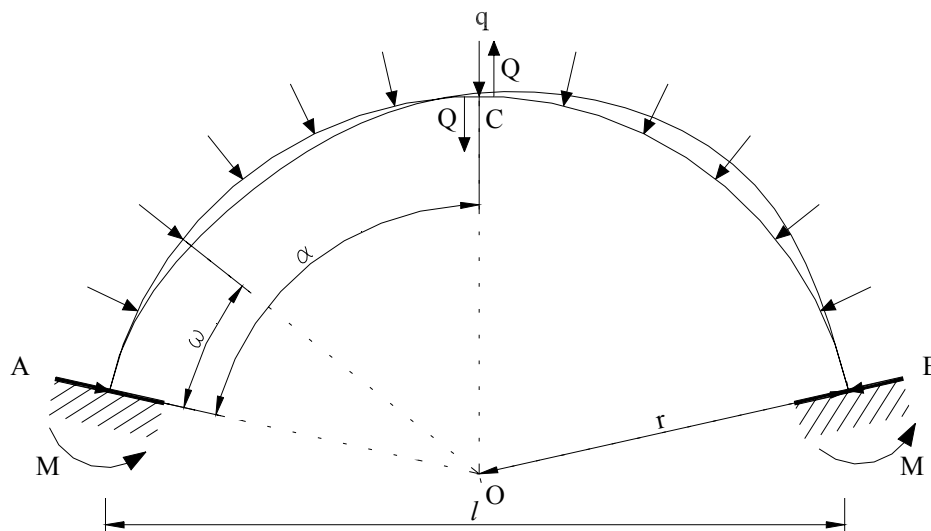


Figura 6.6. Pandeo de arcos circulares biempotrados con carga radial uniforme.

4. Arcos con carga vertical y directriz parabólica.

Si el arco no es muy rebajado la inestabilidad se manifiesta por el descenso de una mitad y levantamiento de la otra, formándose en la clave un punto de inflexión, como en los casos anteriores.

Si la directriz del arco es una parábola coincide con la curva de presiones si la carga q es uniformemente repartida, tal y como se muestra en la figura 6.7.

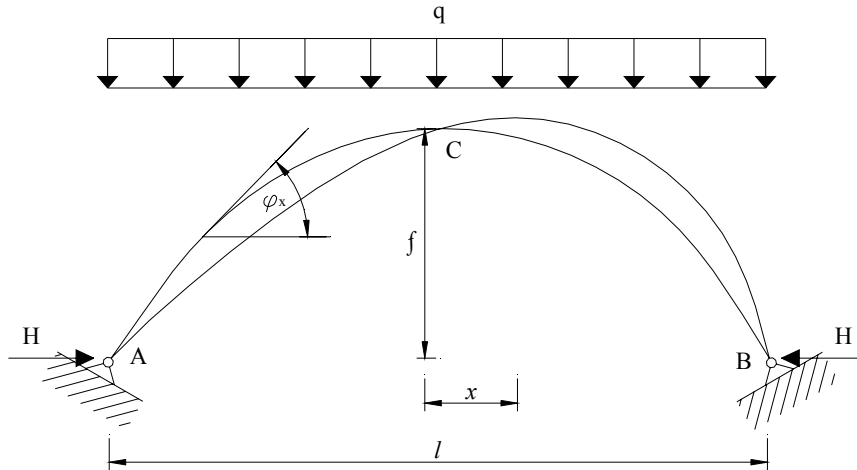


Figura 6.7. Pandeo de arcos parabólicos biarticulados bajo carga uniforme.

Si además el arco es suficientemente rebajado, el esfuerzo axial casi no varía a lo largo del eje, tomando el valor.

$$N = \frac{H}{\cos \varphi_x}$$

siendo φ_x el ángulo que forma la tangente con el eje de abscisas (figura 6.7). Por tanto, pueden utilizarse los resultados de la pregunta anterior con suficiente aproximación.

Así, en el arco biarticulado, tal y como se expuso, se puede despreciar 1 frente a $\frac{\pi^2}{\alpha^2}$, con lo que se puede escribir:

$$N_{cr} \cong \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [6.15]$$

siendo s la longitud del arco, cuyo valor aproximado es:

$$s = l \cdot \left(1 + 2.67 \cdot \frac{f^2}{l^2} \right)$$

Si el arco no es lo suficientemente rebajado no se puede realizar la simplificación anterior, por lo que se debería operar con el término completo $\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1\right)$ (Argüelles, 1996). En este caso, se podría aproximar el ángulo α a su tangente, de modo que:

$$\alpha \cong \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot f}{\left(\frac{l}{2}\right)}$$

y como valor del esfuerzo normal crítico se tomaría:

$$N_{cr} = \left(\pi^2 - 16 \cdot \frac{f^2}{l^2} \right) \cdot \frac{E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [6.16]$$

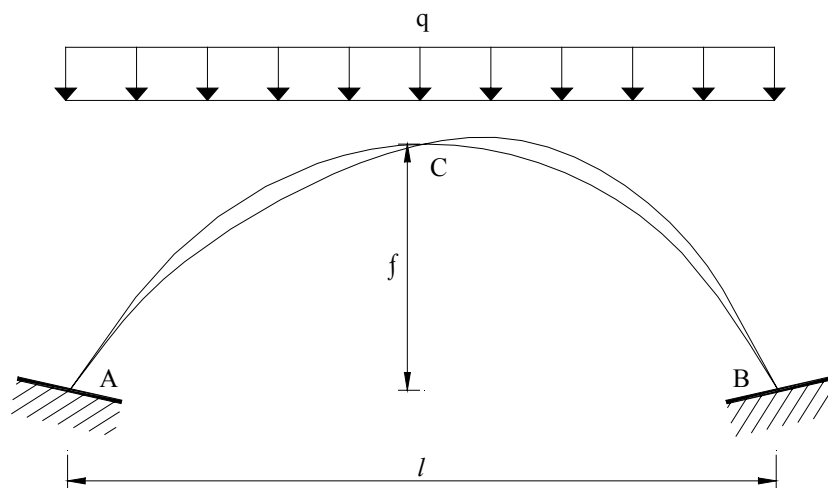


Figura 6.8. Pandeo de arcos parabólicos biempotrados bajo carga uniforme.

Conocido este valor, se le puede aproximar el empuje crítico H_{cr} , de modo que se obtenga el valor de la carga crítica uniformemente repartida por medio de la expresión:

$$q_{cr} = \left(\frac{8 \cdot f}{l^2} \right) \cdot H_{cr} \quad [6.17]$$

En el arco biempotrado de directriz parabólica (figura 6.8), el valor del término (K^2-1) de la ecuación [6.14] es aproximadamente el doble que el de la expresión [6.15], por lo que se obtiene (Argüelles, 1996):

$$N_{cr} \cong \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [6.18]$$

5. Método matricial.

En principio, el estudio del pandeo del arco suele realizarse bajo condiciones ideales, situaciones en las que el arco no sufre flexiones en ningún punto de su directriz antes de que se produzca el pandeo, con lo que el comportamiento es similar al de un soporte comprimido (Escrig, 1985).

Antes de analizar el cálculo de pandeo de arcos por métodos matriciales, dentro del campo lineal, se van a recordar una serie de conceptos que redundarán en el mejor entendimiento del concepto y del método. Todas las explicaciones hacen referencia al pandeo de una barra comprimida, que en realidad puede asimilarse al pandeo de cualquiera de los elementos de pórtico plano en los que se discretiza el arco.

5.1. Bifurcación del equilibrio.

Al menor de los valores críticos de la carga axial se le denomina carga crítica de Euler para la columna, y se designa como:

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Cuando la carga axial coincide con este valor, se produce el colapso de la columna por pandeo lateral. La columna abandona su configuración recta y aparecen deformaciones laterales de flexión. La deformada que adopta la columna es:

$$v = A_1 \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$$

que es denominada *primer modo de pandeo* de la columna. Representa la forma en que la columna colapsa cuando la carga axial llega a su valor crítico, es decir, la forma en que la columna abandona su configuración recta. Para este modo de pandeo se conoce su forma, que es senoidal, con una longitud de onda igual al doble de la longitud de la viga, pero no se conoce su amplitud.

Al alcanzarse el valor de la carga crítica de Euler se produce una bifurcación del equilibrio, que pasa de ser estable cuando $P < P_{cr1}$ a ser

indiferente justo cuando $P = P_{cr1}$ (figura 6.9). Si la carga axial sigue aumentando, con valores $P_{cr1} < P < P_{cr2}$ el equilibrio es inestable, pero la columna se mantiene recta. Cuando P llega a igualar el valor de la segunda carga crítica P_{cr2} , se produce un nuevo colapso que corresponde a una nueva bifurcación del equilibrio. La forma en que la columna abandona el equilibrio en este segundo colapso es nuevamente una ley senoidal con una longitud de onda de valor l (Celigüeta, 1998).

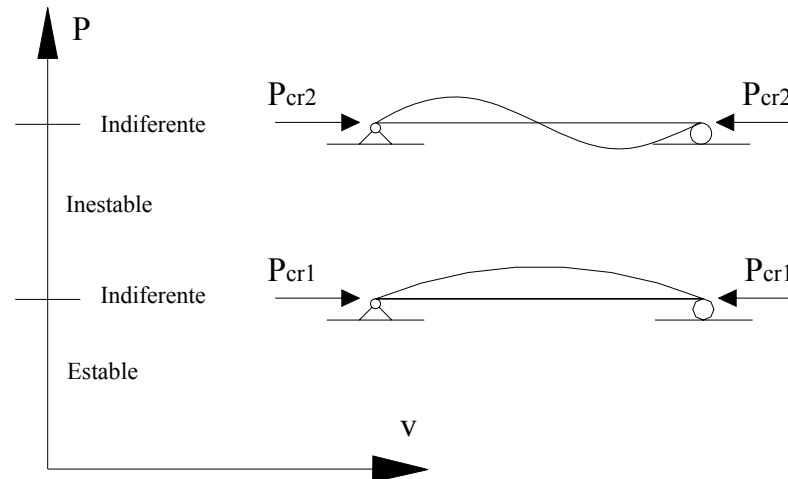


Figura 6.9: Bifurcación del equilibrio de una barra cargada.

La deformada obtenida para cada carga crítica corresponde únicamente a la forma que adopta la columna al comenzar la bifurcación, es decir, la forma que adopta justo en el instante de producirse el pandeo.

Como resumen del análisis de estabilidad efectuado puede decirse que:

- para valores de la carga axial distinto de los valores críticos, la columna se mantiene recta, sin deformación lateral. Si la carga es inferior al primer valor de la carga crítica o carga de Euler, el equilibrio es estable, y si la carga es superior a este valor, el equilibrio es inestable.
- cuando la carga axial adopta el valor de una de las cargas críticas, se produce una brusca bifurcación del equilibrio que lleva al colapso por deformación lateral excesiva.

Como se ha visto en los métodos simplificados de cálculo de pandeo de arcos, en estas estructuras es común hablar de carga crítica q_{cr} (radial o uniforme, según el caso estudiado), empuje crítico H_{cr} y esfuerzo normal crítico N_{cr} , con las definiciones e interrelaciones recogidas en las expresiones [6.1] a [6.18]. En las estructuras reticulares convencionales únicamente se hace referencia a la carga crítica de pandeo N_{cr} , que se corresponde con el esfuerzo normal o axil crítico.

5.2. Hipótesis de cálculo.

Para analizar el pandeo de cualquier estructura reticular aplicando el método de bifurcación de equilibrio se debe idealizar la geometría de la estructura, las características del material y el sistema de cargas, con el fin de conseguir que las ecuaciones de equilibrio queden definidas por un sistema homogéneo de ecuaciones (Argüelles, 1996).

Para realizar este análisis se admiten las siguientes simplificaciones:

- Se supone que la directriz del arco sigue el antifunicular de las cargas aplicadas, de modo que todas las secciones de la estructura quedan exclusivamente solicitadas por esfuerzos axiales.
- El arco carece de imperfecciones geométricas, adaptándose a la curva de diseño.
- Durante todo el proceso se supone que el material estructural, acero en el caso considerado, es continuo, homogéneo, isótropo y perfectamente elástico y lineal.
- Debido a la casi coincidencia entre la geometría deformada y la geometría inicial, se desprecia el cambio de posición del arco durante la puesta en carga. En consecuencia, las ecuaciones de equilibrio se plantearán en el sistema inicial no deformado en lugar de hacerlo en el deformado.
- No se contempla la posibilidad de pandeo por flexión-torsión del arco, ni tampoco su pandeo por flexión fuera del plano de la estructura.
- Se admite que las formas de equilibrio del arco son también suficientemente próximas a las iniciales.

En base a estas hipótesis, mientras las cargas no superen un determinado valor, $\alpha_{cr} \cdot P$, los desplazamientos de los puntos de la directriz de un arco difieren muy poco de su posición inicial, adoptando posiciones compatibles con las deformaciones elásticas que sufre la estructura.

Cuando las cargas alcanzan valores $\alpha_{cr} \cdot P$ se presenta un punto de bifurcación de equilibrio, en el cual el arco, para nuevos incrementos de carga, puede permanecer con su geometría inicial en una posición de equilibrio inestable o, por el contrario, se originan importantes desplazamientos transversales con los que se alcanzan posiciones de agotamiento del sistema.

A α_{cr} se le denomina *coeficiente multiplicador crítico* y depende de:

- La geometría inicial del arco.
- Las características mecánicas del perfil o perfiles que conforman el arco.
- El módulo de elasticidad del acero.
- Los esfuerzos axiales que soporta el arco.

En relación con este último aspecto, es importante tener en cuenta que las cargas transversales que actúan sobre el arco afectan al pandeo global por las componentes axiales que generan, pero no por las flexiones que producen, que en principio deben ser nulas.

5.3. Determinación de la carga crítica.

Tal y como se ha visto, cualquier arco se puede descomponer en tramos rectos que se aproximen a su geometría real, tanto más cuanto menor sea el tamaño del elemento recto empleado. La similitud entre el cálculo matricial y el cálculo por el método de elementos finitos es muy grande cuando se trata de elementos unidimensionales, como lo son los elementos de pórtico plano descritos con profusión de detalles en los capítulos 4 y 5.

Se puede establecer una relación directa entre los nudos de una estructura reticular, como lo sería el arco plano descompuesto en tramos rectos, y los nodos de un arco discretizado en elementos de pórtico plano, así como entre estos elementos y las barras rectas que pueden utilizarse para aproximarse a la geometría del arco.

Por ello se va a mantener la notación del método de los elementos finitos, porque de este modo se facilita la conexión con la expresiones empleadas en el cálculo no lineal del pandeo, que se tratará con posterioridad.

La ecuación matricial de una barra o de un elemento de pórtico plano sometido a cargas en sus nodos, referida a sus ejes locales, viene dada por:

$$[K^{(e)}] \cdot \{a^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} = \{q^{(e)}\}$$

Esta ecuación relaciona las cargas aplicadas en los nudos con sus desplazamientos, en coordenadas locales, pero no tiene en cuenta las variaciones que los esfuerzos axiales de compresión N provocan en la matriz de rigidez.

El acoplamiento del esfuerzo axial con la deformada del elemento de pórtico plano da origen a la siguiente ecuación matricial:

$$\left[\left[K^{(e)} \right] \cdot \{a^{(e)}\} - N \cdot \left[K_g^{(e)} \right] \right] - \{f^{(e)}\} = \{q^{(e)}\}$$

siendo:

$\{f^{(e)}\}$	vector de fuerzas nodales equivalentes, referido a los ejes locales del elemento;
$\{q^{(e)}\}$	vector de fuerzas nodales de equilibrio, en coordenadas locales;
$\left[K^{(e)} \right]$	matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales;
$\left[K_g^{(e)} \right]$	matriz de rigidez geométrica del elemento de pórtico plano, también referida a ejes locales;
$\{a^{(e)}\}$	vector desplazamiento de los nudos en coordenadas locales;
N	esfuerzo axial que solicita al elemento.

Esta ecuación referida a los ejes globales del arco se expresa:

$$\left[\left[K^{(e)} \right] \cdot \{a^{(e)}\} - N \cdot \left[K_g^{(e)} \right] \right] - \{f^{(e)}\} = \{q^{(e)}\}$$

donde todas las variables tienen el mismo significado, salvo que están referidas a coordenadas globales.

Ensamblando las matrices de rigidez de las barras y aplicando las condiciones de apoyo del arco, se obtiene la ecuación matricial de la estructura.

$$\left[\left[K^* \right] \cdot \{a^*\} - N_0 \cdot \left[K_g^* \right] \right] = \{f_a^*\} \quad [6.19]$$

en la que:

$\{f_a^*\}$	representa el vector de cargas aplicadas sobre los nodos con algún grado de libertad, referido a los ejes globales;
$\left[K^* \right]$	es la matriz de rigidez reducida del arco, que incluye únicamente los coeficientes de los nodos con algún grado de libertad, en coordenadas globales;
$\left[K_g^* \right]$	es la matriz de rigidez geométrica reducida del sistema en coordenadas globales;
$\{a^*\}$	es el vector desplazamiento de los nodos con algún grado de libertad en coordenadas globales;

N_0 es el esfuerzo axial real de compresión de un elemento del arco, que sirve de referencia para definir en forma porcentual los axiles de los restantes elementos de pórtico plano. Se suele utilizar el axil máximo.

La anulación del determinante de esta matriz proporciona un polinomio en N_0 de grado n , siendo n el número de grados de libertad del arco^(*), cuya raíz menor corresponde a la carga crítica N_{cr1} . Los valores solución de N son los autovalores de la ecuación característica:

$$\left| [K^*] - N_0 \cdot [K_g^*] \right| = 0 \quad [6.20]$$

Al anularse el determinante, los desplazamientos de los nudos libres se hacen muy grandes por convertirse la estructura en un mecanismo.

La relación N_{cr}/N_0 es el valor del coeficiente multiplicador crítico α_{cr} , que indica el valor por el que se han de multiplicar los esfuerzos axiles de todos los elementos discretizados para alcanzar el inicio del primer modo de pandeo global del arco.

5.4. Matriz de rigidez geométrica.

Para simplificar en lo posible la comprensión de las expresiones, se va a considerar un elemento recto dispuesto horizontalmente, de modo que coincidan los ejes locales del elemento y los ejes globales del arco. Así, si a un elemento 1-2 se le asocian cuatro grados de libertad, los giros y los desplazamientos de los nodos según el eje z , se definen como *formas modales de deformación* a las funciones representativas de las deformaciones elásticas de la barra (ψ), cuando se da un desplazamiento unidad según uno de los grados de libertad mientras que los restantes permanecen indesplazables.

Se adopta como función aproximada a los desplazamientos reales de la elástica la parábola de tercer grado

$$w = \psi(x) = A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3$$

a la que si se aplica la ecuación diferencial de la viga:

(*) El número de grados de libertad en un pórtico biempotrado es $3(m-1)$, siendo m el número de elementos en los que se ha discretizado el arco. En un arco biarticulado, el número de grados de libertad es $3(m-1)+2$.

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x)$$

corresponde una ley de momentos flectores, al no existir cargas intermedias. Las constantes A , B , C y D se deducen al aplicar las condiciones de sustentación del elemento considerado.

Una vez obtenidas las expresiones de las deformadas para cada grado de libertad, se aplica el teorema de los trabajos virtuales, considerando como sistema en equilibrio la deformada $\psi_j(x)$ y como desplazada virtual la función $\psi_i(x)$, obtenida para un desplazamiento unidad δ_i .

El trabajo realizado por las fuerzas externas es:

$$W_a = K_{ij}^{(e)} \cdot \delta_i = K_{ij}^{(e)}$$

De igual manera, el trabajo realizado por las fuerzas internas, que en este caso son sólo los momentos flectores (se desprecia la influencia de cortantes y axiles), es:

$$U = \int_0^l M(x) \cdot d\theta = \int_0^l E \cdot I \cdot \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} \cdot dx$$

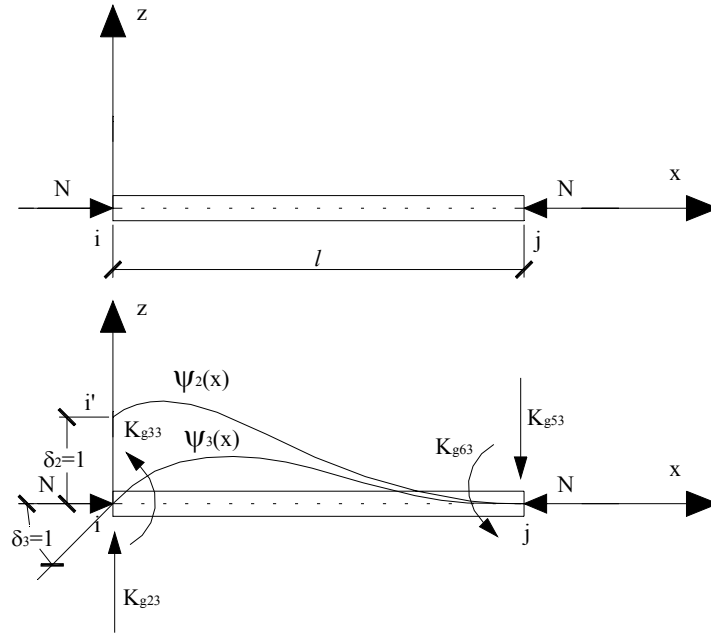
Iguando ambas expresiones, se tiene:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_0^l E \cdot I \cdot \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} \cdot dx$$

Estos valores de $K_{ij}^{(e)}$ no tienen en cuenta la influencia del esfuerzo axil N que solicita a la barra, junto con el momento flector $M(x)$.

Antes de continuar con la exposición, se va a indicar la notación empleada. En un elemento de pórtico plano genérico ij , se designa por δ_1 , δ_2 y δ_3 a los desplazamientos del nodo i según sus tres grados de libertad. Esto es, δ_1 se refiere al desplazamiento longitudinal, δ_2 al desplazamiento transversal y δ_3 al giro del nodo i . Del mismo modo, δ_4 , δ_5 y δ_6 designan los desplazamientos longitudinal, transversal y giro del nodo j .

Para estimar esta influencia se elige como sistema en equilibrio a la barra ij , deformada por el desplazamiento unidad de uno de sus grados de libertad, por ejemplo $\psi_3(x)$ para $\delta_3=1$, solicitada por el esfuerzo axil N . Y como deformada virtual otra función, por ejemplo $\psi_2(x)$, para $\delta_2=1$ (figura 6.10).

Figura 6.10: Influencia del esfuerzo axial sobre una barra ij .

El trabajo generado por la fuerza externa $K_{g23}^{(e)}$ (coeficiente de rigidez debido al esfuerzo axial en el grado de libertad 2 para un desplazamiento unidad en el grado de libertad 3), es:

$$W_a = K_{g23}^{(e)} \cdot \delta_2; \delta_2 = 1 \quad [6.21]$$

Este trabajo ha de ser igual al producido por las fuerzas internas, en este caso esfuerzos axiales:

$$U = \int_0^l N \cdot \delta_e \quad [6.22]$$

siendo δ_e la proyección horizontal del acortamiento axial experimentado por el elemento dx .

Por semejanza entre los triángulos rayados de la figura 6.11, se puede establecer la ecuación:

$$\frac{\delta_e}{d\psi_2(x)} = \frac{d\psi_3(x)}{dx}$$

de la que resulta

$$\delta_e = \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot d\psi_2(x) = \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx}$$

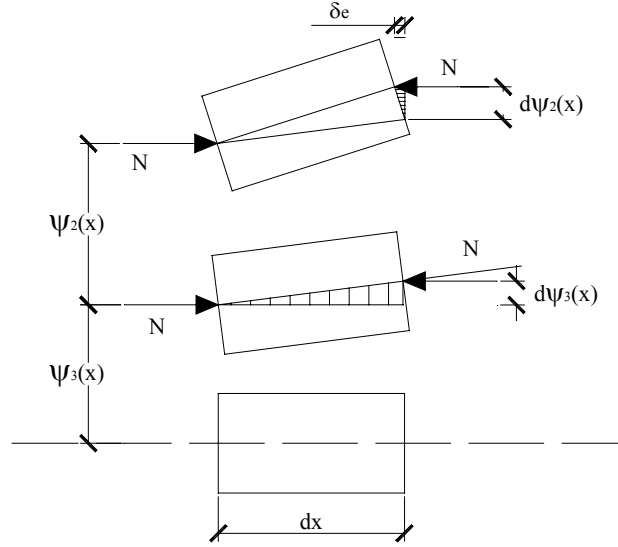


Figura 6.11: Geometría de las deformaciones.

Igualando U y W_a en las expresiones [6.21] y [6.22], e introduciendo el valor obtenido de δ_e , se tiene:

$$K_{g23}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot dx$$

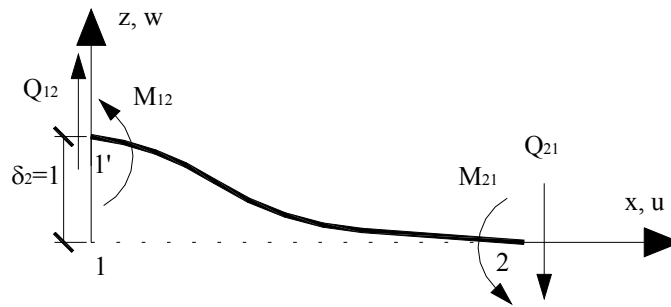
y en general:

$$K_{g,ij}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_i(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_j(x)}{dx} \cdot dx$$

5.4.1. Obtención de las formas modales de deformación.

Como se ha descrito anteriormente, al asociar a un elemento de pórtico plano 1-2 cuatro grados de libertad, y referir los giros y los desplazamientos de los nudos según el eje z , se pueden determinar las formas modales de deformación dando un desplazamiento unidad según cada uno de los grados de libertad mientras que los restantes permanecen indesplazables.

- Para $\delta_2=1$:

Figura 6.12: Forma modal de deformación para $\delta_2=1$.

Los valores de Q_{ij} y M_{ij} , calculados en el Capítulo 5, son:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= K_{22}^{(e)} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & Q_{21} &= K_{52}^{(e)} = -\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} \\ M_{12} &= K_{32}^{(e)} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & M_{21} &= K_{62}^{(e)} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \end{aligned}$$

La ecuación de momentos flectores del elemento es:

$$M(x) = Q_{12} \cdot x - M_{12} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} \cdot x - \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Si se aplica la ecuación diferencial del elemento de pórtico plano se obtiene:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} \cdot x - \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Integrando:

$$w' = \frac{12}{l^3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{6}{l^2} \cdot x + C_1$$

Para obtener C_1 se recurre a la condición de que en $x=l$, $w'=0$.

$$0 = \frac{6}{l} - \frac{6}{l} + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

Por tanto:

$$w' = \frac{6}{l^3} \cdot x^2 - \frac{6}{l^2} \cdot x$$

Integrando de nuevo:

$$w = \frac{6}{l^3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{6}{l^2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$$

Para obtener C_2 se utiliza la condición de que en $x=0$, $w=\delta_2=1$.

$$1 = 0 - 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 1$$

Por tanto, la forma modal de deformación para $\delta_2=1$ es:

$$\psi_2(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1$$

- Para $\delta_3=1$:

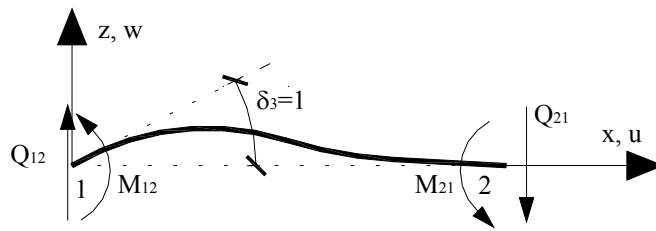


Figura 6.13: Forma modal de deformación para $\delta_3=1$.

Los valores de Q_{ij} y M_{ij} son:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= K_{23}^{(e)} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & Q_{21} &= K_{53}^{(e)} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ M_{12} &= K_{33}^{(e)} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} & M_{21} &= K_{63}^{(e)} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} \end{aligned}$$

La ecuación de momentos flectores es:

$$M(x) = Q_{12} \cdot x - M_{12} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot x - \frac{4 \cdot E \cdot I}{l}$$

Al aplicar la ecuación diferencial del elemento se obtiene:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot x - \frac{4 \cdot E \cdot I}{l}$$

Integrando:

$$w' = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{4}{l} \cdot x + C_1$$

En $x=0$, $w'=\delta_3=1$.

$$1 = 0 - 0 + C_1 \rightarrow C_1 = 1$$

Por tanto:

$$w' = \frac{3}{l^2} \cdot x^2 - \frac{4}{l} \cdot x + 1$$

Integrando de nuevo:

$$w = \frac{3}{l^2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{4}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + x + C_2$$

En $x=0$, $w=0$.

$$0 = 0 - 0 + 0 + C_2 \rightarrow C_2 = 0$$

Así, la forma modal de deformación para $\delta_3=1$ es:

$$\psi_3(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2 \cdot x^2}{l} + x = x \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

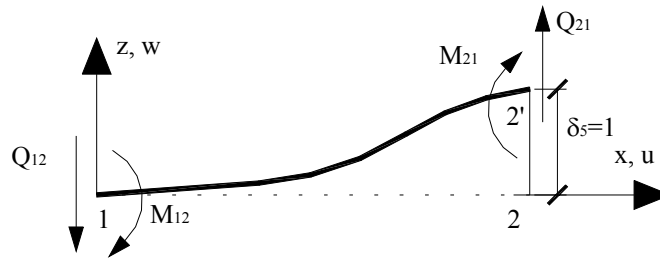
- Para $\delta_5=1$:

Los valores de Q_{ij} y M_{ij} , calculados en el Capítulo 5, son:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= K_{25}^{(e)} = -\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & Q_{21} &= K_{55}^{(e)} = \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} \\ M_{12} &= K_{35}^{(e)} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & M_{21} &= K_{65}^{(e)} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \end{aligned}$$

La ecuación de momentos flectores del elemento recto es:

$$M(x) = Q_{12} \cdot x - M_{12} = \frac{-12 \cdot E \cdot I}{l^3} \cdot x + \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Figura 6.14: Forma modal de deformación para $\delta_5=1$.

Si se aplica la ecuación diferencial del elemento de pórtico plano se obtiene:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} - \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} \cdot x$$

Integrando:

$$w' = \frac{6}{l^2} \cdot x - \frac{12}{l^3} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

En $x=0$, $w'=0$, de donde se deduce que $C_1=0$.

Por tanto:

$$w' = \frac{6}{l^2} \cdot x - \frac{6}{l^3} \cdot x^2$$

Integrando de nuevo:

$$w = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{6}{l^3} \cdot \frac{x^3}{3} + C_2$$

En $x=0$, $w=0$, por lo que también $C_2=0$.

Por tanto, la forma modal de deformación para $\delta_5=1$ es:

$$\psi_5(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3$$

- Para $\delta_6=1$:

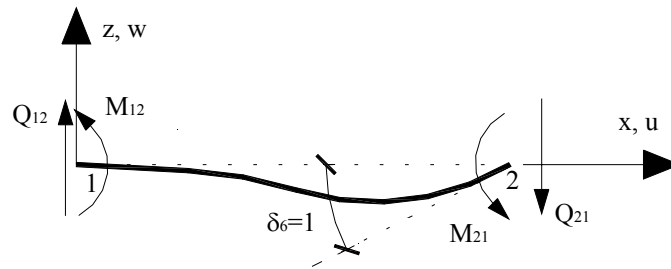


Figura 6.15: Forma modal de deformación para $\delta_6=1$.

Los valores de Q_{ij} y M_{ij} son:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= K_{26}^{(e)} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & Q_{21} &= K_{56}^{(e)} = -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ M_{12} &= K_{36}^{(e)} = \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} & M_{21} &= K_{66}^{(e)} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} \end{aligned}$$

La ecuación de momentos flectores del elemento es:

$$M(x) = Q_{12} \cdot x - M_{12} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot x - \frac{2 \cdot E \cdot I}{l}$$

Al aplicar la ecuación diferencial de gobierno se obtiene:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) = \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot x - \frac{2 \cdot E \cdot I}{l}$$

Integrando:

$$w' = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{l} \cdot x + C_1$$

Para obtener C_1 se emplea la condición de que en $x=l$, $w'=\delta_6=1$.

$$1 = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{2}{l} \cdot l + C_1 \rightarrow C_1 = 0$$

Por tanto:

$$w' = \frac{3}{l^2} \cdot x^2 - \frac{2}{l} \cdot x$$

Integrando de nuevo:

$$w = \frac{3}{l^2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$$

En $x=0$, $w=0$, por lo que $C_2=0$.

Así, la forma modal de deformación para $\delta_6=1$ es:

$$\psi_6(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} = x \cdot \left(\left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{x}{l} \right)$$

5.4.2. Obtención de los coeficientes de rigidez geométrica en coordenadas locales.

La matriz de rigidez geométrica del elemento recto $[K_g^{(e)}]$ se completa con los esfuerzos y deformaciones axiales, que en este caso son nulos, por lo que tendrá la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{g22}^{(e)} & K_{g23}^{(e)} & | & 0 & K_{g25}^{(e)} & K_{g26}^{(e)} \\ 0 & K_{g32}^{(e)} & K_{g33}^{(e)} & | & 0 & K_{g35}^{(e)} & K_{g36}^{(e)} \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{g52}^{(e)} & K_{g53}^{(e)} & | & 0 & K_{g55}^{(e)} & K_{g56}^{(e)} \\ 0 & K_{g62}^{(e)} & K_{g63}^{(e)} & | & 0 & K_{g65}^{(e)} & K_{g66}^{(e)} \end{pmatrix}$$

$$- K_{g22}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_2(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1 \quad \frac{d\psi_2(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2}$$

$$K_{g22}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2} \right)^2 \cdot dx = N \cdot \frac{36}{30 \cdot l}$$

$$- K_{g23}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_2(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1 \quad \frac{d\psi_2(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2}$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2 \cdot x^2}{l} + x \quad \frac{d\psi_3(x)}{dx} = 1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2}$$

$$K_{g23}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2} \right) \cdot dx = N \cdot \frac{3}{30}$$

$$- K_{g32}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot dx = K_{g23}^{(e)}$$

$$- K_{g33}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2 \cdot x^2}{l} + x \quad \frac{d\psi_3(x)}{dx} = 1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2}$$

$$K_{g33}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2} \right)^2 \cdot dx = N \cdot \frac{4 \cdot l}{30}$$

$$- K_{g52}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_5(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^3 \quad \frac{d\psi_5(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3}$$

$$\psi_2(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1 \quad \frac{d\psi_2(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2}$$

$$K_{g52}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3} \right) \cdot \left(\frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2} \right) \cdot dx = N \cdot \frac{-36}{30 \cdot l}$$

$$- K_{g53}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_5(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^3 \quad \frac{d\psi_5(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3}$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2 \cdot x^2}{l} + x \quad \frac{d\psi_3(x)}{dx} = 1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2}$$

$$K_{g53}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2} \right) \cdot dx = N \cdot \frac{-3}{30}$$

$$- K_{g62}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_6(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}$$

$$\frac{d\psi_6(x)}{dx} = \frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l}$$

$$\psi_2(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1$$

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2}$$

$$K_{g62}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l} \right) \cdot \left(\frac{6 \cdot x^2}{l^3} - \frac{6 \cdot x}{l^2} \right) \cdot dx = N \cdot \frac{3}{30}$$

$$- K_{g63}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_6(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}$$

$$\frac{d\psi_6(x)}{dx} = \frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l}$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2 \cdot x^2}{l} + x$$

$$\frac{d\psi_3(x)}{dx} = 1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2}$$

$$K_{g63}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l} \right) \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot x}{l} + \frac{3 \cdot x^2}{l^2} \right) \cdot dx = N \cdot \frac{-l}{30}$$

$$- K_{g25}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot dx = K_{g52}^{(e)}$$

$$- K_{g26}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_2(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot dx = K_{g62}^{(e)}$$

$$- K_{g35}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot dx = K_{g53}^{(e)}$$

$$- K_{g36}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_3(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot dx = K_{g63}^{(e)}$$

$$- K_{g55}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_5(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$\frac{d\psi_5(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3}$$

$$K_{g55}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3} \right)^2 \cdot dx = N \cdot \frac{36}{30 \cdot l}$$

$$- K_{g56}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_5(x) = 3 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{l} \right)^3 \quad \frac{d\psi_5(x)}{dx} = \frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3}$$

$$\psi_6(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \quad \frac{d\psi_6(x)}{dx} = \frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l}$$

$$K_{g56}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{6 \cdot x}{l^2} - \frac{6 \cdot x^2}{l^3} \right) \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l} \right) \cdot dx = N \cdot \frac{-3}{30}$$

$$- K_{g65}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_5(x)}{dx} \cdot dx = K_{g56}^{(e)}$$

$$- K_{g66}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot \frac{d\psi_6(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\psi_6(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \quad \frac{d\psi_6(x)}{dx} = \frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l}$$

$$K_{g66}^{(e)} = \int_0^l N \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{l^2} - \frac{2 \cdot x}{l} \right)^2 \cdot dx = N \cdot \frac{4 \cdot l}{30}$$

De este modo, la matriz de rigidez geométrica queda definida como:

$$N \cdot [K_g^{(e)}] = \frac{N}{30 \cdot l} \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3 \cdot l & 0 & -36 & 3 \cdot l \\ 0 & 3 \cdot l & 4 \cdot l^2 & 0 & -3 \cdot l & -l^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3 \cdot l & 0 & 36 & -3 \cdot l \\ 0 & 3 \cdot l & -l^2 & 0 & -3 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{array} \right) \quad [6.23]$$

5.5. Ecuación matricial, coeficiente crítico y forma modal de pandeo.

Ensamblando las matrices de rigidez de todos los elementos de pórtico plano referidas a los ejes globales se obtiene la ecuación matricial completa del arco [6.19]:

$$\left[[K^*] \cdot \{a^*\} - N_0 \cdot [K_g^*] \right] = \{f_a^*\}$$

En esta expresión N_0 es el esfuerzo axial real de compresión de uno de los elementos del arco, que sirve de referencia para definir en forma porcentual los axiles de los restantes tramos en los que se ha discretizado.

Como se ha comentado, el menor valor de N_0 , denominado carga crítica N_{cr1} , anula el determinante [6.20],

$$\left| [K^*] - N_0 \cdot [K_g^*] \right| = 0$$

y permite deducir el *coeficiente crítico de pandeo*, definido por:

$$\alpha_{cr} = \frac{N_{cr1}}{N_0} \quad [6.24]$$

Una vez obtenido α_{cr} , será necesario determinar los coeficientes de esbeltez β de cada elemento de pórtico plano, del modo:

$$\beta = \sqrt{\frac{P_E}{P_{cr}}} \quad [6.25]$$

siendo P_E y P_{cr} la carga de Euler y la carga crítica para el elemento calculado, respectivamente, que vienen definidas por las expresiones:

$$P_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \quad [6.26]$$

$$P_{cr} = \alpha_{cr} \cdot N$$

Para resolver el sistema matricial [6.20] es necesario realizar las transformaciones siguientes:

$$\left\| [K^*]^{-1} \cdot [K^*] - N \cdot [K^*]^{-1} \cdot [K_g^*] \right\| = 0$$

$$\left\| \frac{[I]}{N} - [K^*]^{-1} \cdot [K_g^*] \right\| = 0$$

$$\left\| \frac{[I]}{N} - [D] \right\| = 0$$

donde:

$[D]$ es la matriz característica, igual a $[K^*]^{-1} \cdot [K_g^*]$

$[I]$ es la matriz unidad

Al autovalor menor N_{cr1} se le asocia el vector propio $\{\Delta\}$, con el que se verifica la ecuación característica:

$$[I] \cdot \{\Delta\} = N_{cr1} \cdot [D] \cdot \{\Delta\} \quad [6.27]$$

Los componentes del autovector $\{\Delta\}$ representan los desplazamientos modales de los nudos libres del arco al iniciarse el pandeo, definiendo la *forma modal de pandeo* del arco.

5.6. Procedimiento operativo.

Partiendo de las matrices de rigidez y geométrica reducidas $[K^*]$ y $[K_g^*]$, es decir, que incluyen los coeficientes de los nodos con algún grado de libertad, se obtiene la matriz característica $[D]$:

$$[D] = [K^*]^{-1} \cdot [K_g^*]$$

Para obtener el valor N_{cr1} se utiliza el siguiente método iterativo.

En primer lugar, se elige como primer vector de tanteo $\{u_1\} = \{1 \ 1 \ 1 \dots 1\}^T$, cuya introducción en la ecuación característica [6.27] origina un nuevo vector $\{u_2\}$:

$$\{u_2\} = [D] \cdot \{u_1\}^T$$

Se normaliza el vector $\{u_2\}$, para lo cual es necesario calcular previamente su módulo. Así, llamando λ_2 al módulo del vector $\{u_2\}$, queda definido por:

$$\lambda_2 = \sqrt{u_{21}^2 + u_{22}^2 + u_{23}^2 + \dots + u_{2n}^2}$$

$$\|u_2\| = \frac{\{u_2\}}{\lambda_2}$$

Si $\{u_2\}$ fuese el autovector buscado, cumpliría la ecuación:

$$[I] \cdot \{u_2\}^T = \frac{1}{\lambda_2} \cdot [D] \cdot \{u_2\}^T$$

De no cumplirse se elige como vector de prueba $\{u_3\}$, de valor:

$$\{u_3\} = [D] \cdot \frac{\{u_2\}^T}{\lambda_2}$$

Se normaliza el vector $\{u_3\}$, y se repite el proceso anterior hasta que se halle un vector $\{u_n\}$ para el cual se cumpla que su módulo λ_n difiera del módulo λ_{n-1} una cantidad inferior a un valor límite prefijado, dependiendo de la exactitud requerida.

Las componentes del vector propio $\{u_n\}$ representan los desplazamientos modales de los nudos libres ($\{\Delta\}$ en la notación de la expresión [6.27]), y el menor valor de la carga crítica N_{cr1} será igual a:

$$N_{cr1} = \frac{1}{\lambda_n}$$

Este valor es el que ha de alcanzar el esfuerzo axial en el elemento de referencia para que se presente el pandeo global del arco.

Por último, el valor del coeficiente crítico de pandeo se obtiene de dividir N_{cr1} entre N_0 , tal y como refleja la expresión [6.24].

6. Análisis de pandeo no lineal.

Con independencia de que los desplazamientos y deformaciones sean pequeños o grandes, las condiciones de equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores han de cumplirse. Por tanto, si como es normal, los desplazamientos se definen en función de un número finito de parámetros nodales, se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio necesarias mediante el principio de los

trabajos virtuales, tal y como se expuso en su momento. Sin embargo, las tensiones y deformaciones deben definirse en el cálculo no lineal de manera que sean conjugadas entre sí.

$$\{\psi(a)\} = \int_V [\bar{B}]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV - \{f\} = 0 \quad [6.28]$$

donde $\{\psi\}$ representa la suma de fuerzas generalizadas, y $[\bar{B}]$ se deduce de la definición de las deformaciones:

$$\{d\varepsilon\} = [\bar{B}] \cdot \{da\} \quad [6.29]$$

La matriz $[\bar{B}]$ se distingue con una barra de la matriz de deformación convencional $[B]$ debido a que, si los desplazamientos son grandes, las deformaciones son una función no lineal de los desplazamientos, y la matriz $[\bar{B}]$ depende ahora de a . Por tanto,

$$[\bar{B}] = [B] + [B_L(a)] \quad [6.30]$$

donde $[B]$ es la matriz que interviene cuando no se consideran más que deformaciones infinitesimales lineales, y $[B_L]$ es una matriz que depende de los desplazamientos y que generalmente se definirá como función lineal de dichos desplazamientos.

Si las deformaciones son moderadamente pequeñas, la relación elástica general

$$\{\sigma\} = [D] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad [6.31]$$

sigue siendo válida, donde $\{\varepsilon_0\}$ representa el vector de deformaciones iniciales, $\{\sigma_0\}$ el vector de tensiones iniciales y $[D]$ la matriz de constantes elásticas o matriz constitutiva.

Sin embargo, se podría definir cualquier relación no lineal entre tensiones y deformaciones, ya que el proceso se reduce a resolver un sistema de ecuaciones no lineales definido por [6.28]. Las integrales que aparecen en esta expresión se calculan elemento a elemento, y para establecer el equilibrio nodal se recurre al procedimiento general estudiado en el que se tiene en cuenta la contribución de los distintos elementos que concurren en un nodo.

6.1. Solución del problema.

La solución de la ecuación no lineal [6.28] debe encontrarse por aproximaciones sucesivas siguiendo un método iterativo. Si, por ejemplo, se emplea el método de Newton-Raphson, hay que encontrar una relación entre $\{da\}$ y $\{d\psi\}$. Efectuando la variación del primer miembro de la ecuación [6.28] con respecto a $\{da\}$, se tiene:

$$\{d\psi\} = \int_V [d\bar{B}]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV + \int_V [\bar{B}]^T \cdot \{d\sigma\} \cdot dV = [K_T] \cdot \{da\}$$

Utilizando las expresiones [6.29] y [6.31], se obtiene:

$$\{d\sigma\} = [D] \cdot \{d\varepsilon\} = [D] \cdot [\bar{B}] \cdot \{da\}$$

y teniendo en cuenta la relación [6.30],

$$[d\bar{B}] = [dB_L]$$

Por tanto,

$$\{d\psi\} = \int_V [d\bar{B}]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV + [\bar{K}] \cdot \{da\} \quad [6.32]$$

donde

$$[\bar{K}] = \int_V [\bar{B}]^T \cdot [D] \cdot [\bar{B}] \cdot dV = [K] + [K_L]$$

en la que $[K]$ representa la matriz de rigidez convencional para el caso de pequeños desplazamientos, es decir, la obtenida en el cálculo lineal, de valor:

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dV$$

La matriz $[K_L]$ se debe a los grandes desplazamientos, y viene dada por:

$$[K_L] = \int_V ([B]^T \cdot [D] \cdot [B_L] + [B_L]^T \cdot [D] \cdot [B_L] + [B_L]^T \cdot [D] \cdot [B]) \cdot dV$$

A esta matriz $[K_L]$ se la conoce con distintas denominaciones, tales como *matriz de desplazamientos iniciales* o *matriz de grandes desplazamientos*, y contiene sólo términos lineales y cuadráticos en $\{a\}$.

El primer término a la derecha de la igualdad de la expresión [6.32] puede escribirse como:

$$\int_V [d\bar{B}]^T \cdot \{\sigma\} \cdot dV \equiv [K_\sigma] \cdot \{da\}$$

donde $[K_\sigma]$ es una matriz simétrica que depende del nivel de tensión, y que se denomina *matriz de tensión inicial*, o más comúnmente, *matriz de rigidez geométrica*; este ha sido el nombre elegido en la exposición del cálculo del pandeo por métodos matriciales.

Por tanto,

$$\{d\psi\} = ([K] + [K_\sigma] + [K_L]) \cdot \{da\} = [K_T] \cdot \{da\} \quad [6.33]$$

donde $[K_T]$ representa a la *matriz de rigidez tangente total*. Conviene hacer hincapié en esta expresión y observar cómo la matriz de rigidez tangente total, o más sencillamente, matriz tangente, es suma de la matriz de rigidez obtenida en el cálculo elástico $[K]$, de la matriz de rigidez geométrica $[K_\sigma]$ y de la matriz de grandes deformaciones $[K_L]$.

Como en todos los problemas no lineales, es posible que la solución no sea única y existe el riesgo de que la solución carezca de interés físico. En tales casos es aconsejable proceder por incrementos de carga, calculando la solución no lineal correspondiente a cada incremento, lo que presenta además la ventaja adicional de ser más económico, puesto que dentro de cada incremento los efectos de la no linealidad se reducen. Efectivamente, si se toman incrementos de carga suficientemente pequeños, basta una sola iteración por incremento para obtener una solución suficientemente exacta (Zienkiewicz y Taylor, 1994; Bathe, 1996).

La matriz de rigidez geométrica $[K_\sigma]$ no contiene explícitamente los desplazamientos y es proporcional al estado de tensiones. Por tanto, si al comienzo de los cálculos se calculan las tensiones con la ayuda de una solución lineal, se obtiene, a partir de [6.32],

$$\{d\psi\} = ([K] + [K_\sigma]) \cdot \{da\}$$

ya que en este estado la matriz de grandes deformaciones $[K_L]$ es nula.

Multiplicando las cargas por un factor λ se puede encontrar que existe un estado de estabilidad indiferente, es decir, que

$$\{\mathbf{d}\psi\} = ([\mathbf{K}] + \lambda \cdot [\mathbf{K}_\sigma]) \cdot \{\mathbf{d}\mathbf{a}\} \equiv 0 \quad [6.34]$$

El problema del pandeo inicial se resuelve a partir de esta ecuación, en la que la obtención de λ se realiza resolviendo un típico problema de autovalores. Esta estabilidad inicial sólo tiene una interpretación física real cuando las deformaciones obtenidas con la solución elástica (usando $[\mathbf{K}]$) conducen a que la matriz de grandes deformaciones $[\mathbf{K}_L]$ sea idénticamente nula (Zienkiewicz y Taylor, 1994). En la práctica esto sucede en un número muy limitado de situaciones, como el caso de una barra recta sometida a una carga axial o el de una esfera sometida a una presión uniforme, equiparable a un arco circular sometido a presión radial uniforme.

6.2. Procedimiento de Newton-Raphson.

El método de Newton-Raphson es un proceso iterativo adecuado para resolver el sistema de ecuaciones no lineal que define el comportamiento de una estructura, y que siguiendo la notación de Bathe y Cimento^(*) (1980), se escribe:

$$[\mathbf{K}_i^T] \cdot \{\Delta \mathbf{u}_i\} = \{\mathbf{F}^a\} - \{\mathbf{F}_i^{nr}\} \quad [6.35]$$

con

$$\{\mathbf{u}_{i+1}\} = \{\mathbf{u}_i\} + \{\Delta \mathbf{u}_i\} \quad [6.36]$$

donde:

$[\mathbf{K}_i^T]$	representa la matriz de rigidez tangente total;
i	es el subíndice representativo de la iteración actual;
$\{\mathbf{F}^a\}$	es el vector de cargas aplicadas;
$\{\mathbf{u}\}$	es el vector desplazamiento de los nodos con algún grado de libertad;
$\{\mathbf{F}_i^{nr}\}$	es el vector de fuerzas restauradoras, que son cargas generadas por el nivel actual de tensiones.

(*) Notación adoptada por la aplicación informática ANSYS.

Tanto $[K_i^T]$ como $\{F_i^{nr}\}$ se evalúan en función de los valores de $\{u_i\}$. El término que se encuentra a la derecha de la igualdad en la expresión [6.35], $\{F^a\} - \{F_i^{nr}\}$ representa el residuo en cada iteración. Por tanto, en cada iteración se ha de actualizar la matriz de rigidez tangente y el residuo generado, resolviéndose la ecuación [6.35].

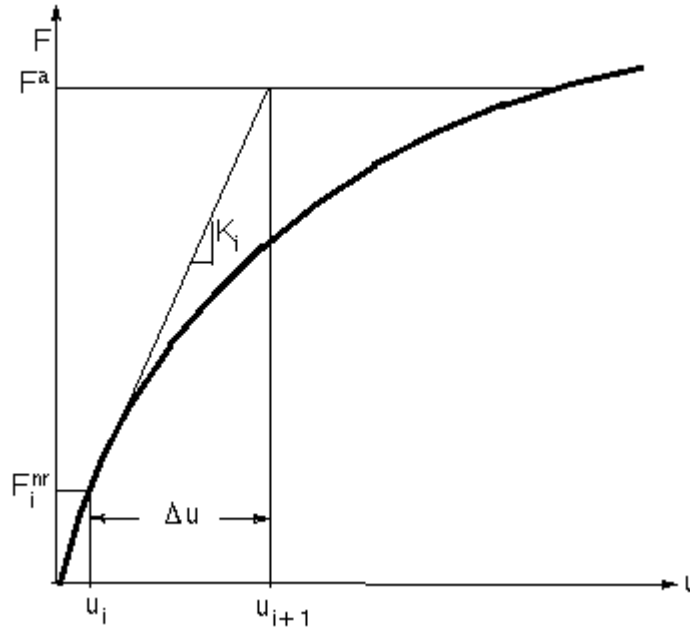


Figura 6.16: Solución de Newton-Raphson. Primera iteración.

Como se muestra en las figuras 6.16 y 6.17, se necesita más de una iteración para obtener una solución. La convergencia se alcanza una vez que el residuo es menor que un determinado valor fijado por el usuario. También se puede definir como criterio de convergencia un valor basado en el incremento de los desplazamientos.

Físicamente el sistema no está en equilibrio si la fuerza aplicada no coincide con la fuerza restauradora. No obstante, una vez que la diferencia o desequilibrio alcanza un valor aceptable, se considera que la solución ha convergido.

El proceso general es el que sigue:

1. Se calcula la solución elástica del vector de desplazamientos $\{u_0\}$, como primera aproximación.

2. Se calcula la matriz de rigidez tangente total $[K_i^T]$ y el vector de fuerzas restauradoras $\{F_i^{nr}\}$ para la configuración definida por $\{u_i\}$.
3. Se calcula $\{\Delta u_i\}$ a partir de la expresión [6.35].
4. Se suma $\{\Delta u_i\}$ a $\{u_i\}$ para obtener la siguiente aproximación $\{u_{i+1}\}$ (ecuación [6.36]).
5. Se repiten los pasos 2 a 4 hasta que se alcance la convergencia.

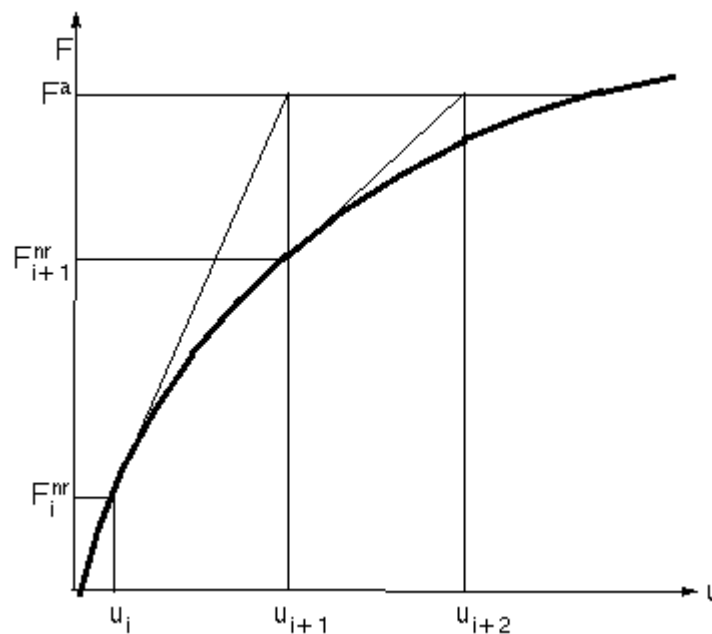


Figura 6.17: Solución de Newton-Raphson. Segunda iteración.

Así, se puede comprobar que la primera iteración proporciona un desplazamiento $\{\Delta u_1\}$, utilizando la rigidez inicial y la fuerza aplicada $\{F^a\}$. La respuesta no lineal del sistema da una fuerza restauradora $\{F_1^{nr}\}$ para este desplazamiento. La segunda iteración proporciona un desplazamiento $\{\Delta u_2\}$, utilizando la matriz de rigidez tangente total actualizada y la fuerza residual. Iteraciones sucesivas conducen rápidamente a la solución convergida, en la que el residuo $\{F^a\} - \{F_i^{nr}\}$ es despreciable.

La convergencia no siempre se obtiene de una manera sencilla. El procedimiento de Newton-Raphson garantiza la convergencia si y sólo si la configuración inicial está próxima a la solución exacta. Si la configuración inicial está demasiado lejos de la configuración final, se dice que el análisis está *fuera del radio de convergencia* y la solución convergerá lentamente, o no convergerá.

Si existen problemas de convergencia será necesario utilizar menores incrementos de carga, recurrir a herramientas de cálculo que faciliten la convergencia, o ambas soluciones a la vez.

El problema de la convergencia debe encuadrarse dentro del método de los elementos finitos, ya que siempre existirá la antítesis entre exactitud en el cálculo y economía de recursos, pues el uso de elementos de pórtico plano de pequeña longitud, o en general, la utilización de una malla tupida, siempre facilitará que se obtenga una solución más exacta, con mayores probabilidades de alcanzar una rápida convergencia, pero a costa de incrementar los recursos informáticos y el tiempo de cálculo.

Por último, el análisis no lineal dificulta la verificación de los resultados, pues la predicción de éstos es complicada cuando se emplean métodos no lineales.

6.3. Obtención de la solución no lineal con ANSYS.

ANSYS emplea el procedimiento de Newton-Raphson para resolver los problemas no lineales, disponiendo además de una serie de herramientas que mejoran los algoritmos de control de los problemas. Así, estas herramientas permiten a ANSYS tener en cuenta las no linealidades geométricas (las únicas que influyen en el problema de arcos de acero), introducir la carga en pequeños incrementos, controlar cómo actúan las iteraciones de equilibrio, obtener ayuda para conseguir y progresar en la convergencia de la solución y dirigir los pasos del programa en el caso de no convergencia.

El análisis no lineal se organiza en tres niveles de funcionamiento:

- Estados de carga («load steps»). Es el nivel superior, y consta de los *niveles* de carga que el usuario define de forma explícita para unos valores de «time». Se asume que las cargas varían linealmente dentro de cada estado de carga.
«Time» es un parámetro de seguimiento de todos los análisis estáticos y transitorios sean o no dependientes del tiempo. Cada estado e incremento de carga está asociado a un valor concreto de «time», que siempre será positivo y no debe tener asociadas unidades cronológicas.
- Subestados de carga («substeps»). Dentro de cada paso de carga el usuario controla el programa para decidir la forma de aplicación de la carga.

- Iteraciones de equilibrio. Para cada subestado de carga el programa llevará a cabo un número de iteraciones de equilibrio para obtener una solución convergente.

Estos conceptos pueden aclararse con la figura 6.18.

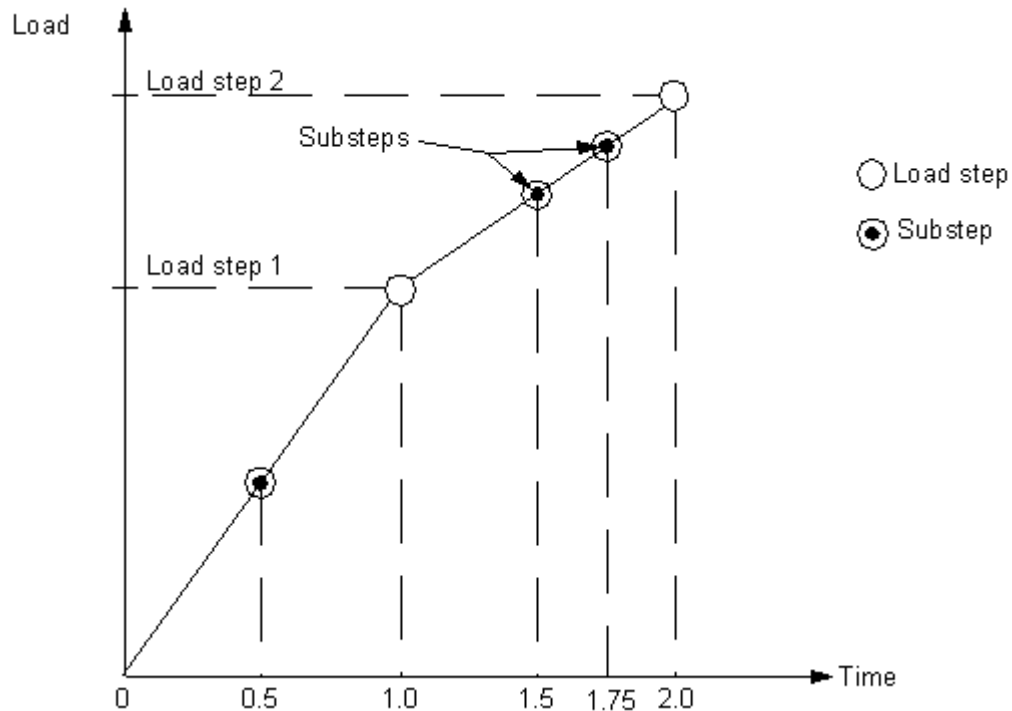


Figura 6.18: «Load steps», «substeps» y «time».

El comando «Time» toma un valor determinado al final de cada nivel de carga, que sirve como parámetro para determinar la robustez y exactitud de la solución, así como para comprobar la eficiencia del sistema. En general, cuando este valor es pequeño, la solución es menos divergente, los resultados son más exactos y se reduce el número de iteraciones de equilibrio para conseguir la convergencia en cada incremento de carga. Por el contrario, la solución total es menos eficiente al utilizarse más tiempo de la CPU del ordenador.

Las dos formas prácticas de designar el tamaño del incremento de carga son las siguientes:

- Directamente, designando el tamaño del incremento de carga que permanece constante a través de todo el estado de carga.
- Permitiendo a la aplicación informática que determine de forma automática el tamaño del incremento. Así, ANSYS variará el tamaño del incremento dentro del estado de carga para ajustar los efectos dinámicos, cambios por no linealidades y dificultades de

convergencia. Este método se conoce como *incremento de carga automático* («automatic time stepping»).

El incremento de carga automático es una facultad de ANSYS mediante la cual se ajustan automáticamente los tamaños de los incrementos de carga dentro de un estado de carga, en orden a obtener un balance óptimo entre la robustez, aproximación y eficacia. Es especialmente recomendable para las situaciones que conllevan un incremento de carga continuo, tal y como sucede en el estudio del pandeo de cualquier estructura.

La figura 6.19 representa el proceso de cálculo seguido por ANSYS, en este caso con tres estados de carga $\{F_i^a\}$, lo que lleva a realizar diversas iteraciones del procedimiento de Newton-Raphson, una por cada «load step».

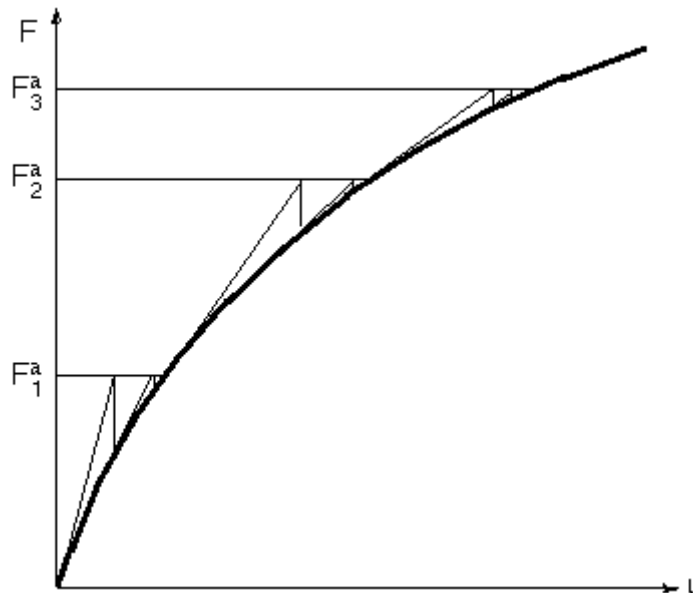


Figura 6.19. Procedimiento de Newton-Raphson incremental.

El criterio de convergencia es fundamental en el análisis no lineal del pandeo. Afecta a la exactitud de la solución y a la eficiencia del sistema. Cuanto más estricto sea este criterio, más exactos serán los resultados, pero a costa de precisar más iteraciones.

La convergencia se consigue cuando se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\|\{R\}\| < \varepsilon_R \cdot R_{ref}$ Convergencia de fuerzas
- $\|\{\Delta u_i\}\| < \varepsilon_u \cdot u_{ref}$ Convergencia de desplazamientos

donde:

$\{R\}$ residuo, o desequilibrio en el modelo, y viene definido por $\{F^a\} - \{F_i^{nr}\}$;

$\{\Delta u_i\}$ incremento de los desplazamientos;

$\|\dots\|$ norma de un vector, que puede ser de tres tipos:

Norma 1 $\|\{R\}\|_1 = \sum |R_i|$

Norma 2 $\|\{R\}\|_2 = \sqrt{\sum (R_i)^2}$

Norma ∞ $\|\{R\}\|_\infty = \max |R_i|$

ε_R tolerancia de la convergencia de las fuerzas;

ε_u tolerancia de la convergencia de los desplazamientos;

R_{ref} valor de referencia para fuerzas. Por defecto adopta el valor $R_{ref} = \|\{F^a\}\|$. Para los grados de libertad con desplazamientos impuestos, se utiliza el valor de $\{F^{nr}\}$ en el cálculo de la norma de R_{ref} ;

u_{ref} valor de referencia para desplazamientos. Por defecto adopta el valor $u_{ref} = \|\{u\}\|$.

Puesto que $\{F^{nr}\}$ es el vector de cargas creado a partir del estado tensional de los elementos en cada instante del análisis, el residuo es, pues, una medida del equilibrio. Conforme las tensiones obtenidas se igualan a la carga aplicada, la solución va convergiendo. Por defecto, ANSYS considera que converge la solución cuando la diferencia normalizada es menor de una milésima parte de la fuerza aplicada, aunque este valor puede modificarse.

De este modo, ANSYS considera que la solución converge cuando se produce la inecuación:

$$\sqrt{\sum (R_i)^2} < 0.001 \cdot \sqrt{\sum (F_i^a)^2}$$

Capítulo 7

Aplicación informática y validación de resultados.

1.	Introducción	217
2.	Arcos circulares y arcos parabólicos. Cálculos	219
2.1.	Validación de resultados.....	223
3.	Pandeo de arcos	240
3.1.	Cálculo del pandeo mediante análisis de autovalores	240
3.1.1.	Comprobación de resultados.....	253
3.2.	Cálculo no lineal	255
4.	Conclusiones	258

Capítulo 7

Aplicación informática y validación de resultados

1. Introducción.

Después de analizar en profundidad el mecanismo resistente de los arcos, diversos métodos de cálculo y el pandeo en el plano de estas estructuras, se van a desarrollar unas sencillas aplicaciones informáticas generadas dentro de la hoja de cálculo Microsoft Excel⁽¹⁾, con el objetivo claro de plasmar estos conocimientos en expresiones matemáticas que resuelvan este tipo de estructuras hiperestáticas.

Muchas son las aplicaciones informáticas existentes en el mercado que resuelven estructuras. Unas simplemente realizan el cálculo elástico, determinando los esfuerzos de las barras y las reacciones en las coacciones, sin dimensionar las barras. Las menos, además, llegan a realizar el cálculo del pandeo global de la estructura. Un tercer grupo de programas informáticos, más ambiciosos, dimensionan las piezas, incorporando un gran número de posibilidades a la hora de producir resultados, tanto por la cantidad de normativas que incluyen como por la posibilidad de elegir perfiles simples o combinación de perfiles. También existen potentes paquetes informáticos que desarrollan, mediante el método de los elementos finitos, todo el proceso de cálculo elástico, pandeo global y cálculo no elástico, con posibilidades enormes, aunque sin llegar a dimensionar las piezas de la estructura.

Así, dentro del primer grupo se va a utilizar *Porticos*, programa de Argüelles (1996), que aunque desarrollado en el sistema operativo MS-DOS⁽¹⁾ y con una introducción de datos totalmente obsoleta, a través de ficheros de texto, proporciona resultados fiables. Dentro del segundo grupo se incluye el programa informático CESPLA, desarrollado por Celigüeta (1998), y el programa *Pandeo*, de Argüelles (1996). El primero de ellos es una moderna aplicación desarrollada en entorno Windows⁽¹⁾, con una introducción de datos, cuando estos son numerosos, un tanto deficiente. De igual manera, la salida de resultados, muy fiables, sólo se realiza gráficamente, por lo que la amigabilidad del entorno pierde potencia en este aspecto. El programa *Pandeo*, también desarrollado bajo MS-DOS, presenta las mismas cualidades y deficiencias que *Porticos*, es decir, una entrada de datos por medio de ficheros que hay que generar externamente, y una salida de resultados que bien se imprimen, bien se incluyen en un fichero de texto.

⁽¹⁾ Microsoft Excel, MS-DOS y Windows son marcas registradas de Microsoft Corporation.

En el tercer grupo se puede incluir la aplicación Metal3D⁽¹⁾, aplicación que puede considerarse como referente dentro del ámbito profesional del proyectista de estructuras metálicas en España. Este programa realiza el cálculo matricial de la estructura que se introduzca. A pesar de su potencia de cálculo, la introducción de un arco requiere una discretización en tramos rectos, cuya introducción de coordenadas no deja de ser laboriosa. La aplicación directa de normativas dificulta la obtención de esfuerzos en barras, pues los resultados se ven alterados por distintos coeficientes. De cualquier forma, el dimensionamiento de las barras por estricta resistencia es correcto. El problema comienza con el dimensionamiento cuando se incluye el cálculo a pandeo, pues al no ser una estructura porticada tipo entramado y al seguir en puridad las recomendaciones de la normativa española de acero NBE-EA 95, que no se muestra muy explícita en cuanto a su cálculo, los resultados difieren de forma sustancial con respecto a los que se obtienen mediante cálculo matricial. Por ello, a pesar de los métodos de cálculo que implementa para resolver el pandeo, únicamente la introducción del coeficiente β de pandeo proporciona resultados exactos.

También en este grupo podría incluirse la aplicación Metalpla⁽²⁾, que presenta mejoras sustanciales frente a los programas mencionados de los autores, al estar realizado en entorno Windows. Sin embargo, la introducción de datos para arcos sigue siendo laboriosa, y la obtención de resultados podría ser más intuitiva, a parte de que en ciertos casos no es posible visualizar algunos resultados en pantalla, debiendo recurrirse a largos listados. Además, al ceñirse los autores a la NBE EA-95 y al Eurocódigo 3, se pierde la posibilidad del cálculo del pandeo global de la estructura mediante autovalores.

Por último, dentro de las aplicaciones que desarrollan el método de los elementos finitos, se han utilizado ANSYS⁽³⁾ y GiD⁽⁴⁾. La primera es un modelo dentro del campo de la ingeniería civil y se convierte en la principal referencia del autor a la hora de chequear resultados proporcionados por cálculos realizados siguiendo la metodología de los elementos finitos. Presenta inconvenientes similares a las grandes aplicaciones citadas en el grupo anterior a la hora de introducir datos en los arcos parabólicos, no así en los circulares.

GiD tiene un rango de actuación inferior a ANSYS, pues no permite cálculos no lineales, por lo que se ha utilizado en menor medida al ser necesarios estos cálculos para la última parte del trabajo.

⁽¹⁾ Metal3D es marca registrada de CYPE Ingenieros S.A.

⁽²⁾ Metalpla es marca registrada de Ramón Argüelles Álvarez y Ramón Argüelles Bustillo.

⁽³⁾ ANSYS es marca registrada de ANSYS Incorporation.

⁽⁴⁾ GiD es marca registrada del CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos de Ingeniería) de la Universidad Politécnica de Cataluña.

Por tanto, la decisión de realizar una aplicación informática que calcule estructuras no es, en absoluto, novedosa. La innovación se encuentra en el entorno elegido, la hoja de cálculo Microsoft Excel, impresionante herramienta de trabajo que en la mayor parte de los ordenadores personales *descansa* apaciblemente o es claramente infrautilizada. Se barajó la posibilidad de emplear Matlab⁽¹⁾, como ya se emplea en algunos cursos de elementos finitos (Felippa, 2001a, b), pero esta decisión implicaría la adquisición de este paquete informático, pues su distribución es infinitamente menor que la hoja de cálculo de Microsoft.

Por tanto, para facilitar al ingeniero la capacidad de calcular arcos con una herramienta de que dispone de una manera casi simultánea con el ordenador, en la mayor parte de los casos, se aceptó el reto de manejar y programar en este entorno.

2. Arcos circulares y arcos parabólicos. Cálculos.

Una vez decidido el entorno de la aplicación, se han creado cuatro archivos independientes, dos para el cálculo de arcos circulares y dos para la resolución de arcos parabólicos, discriminando entre biarticulados y biempotrados en ambos casos. Cada archivo constituye un libro en la terminología de Excel, y dentro del libro existen diversas hojas, que se ajustan a la secuencia de cálculo seguida. No se ha considerado la refundición de los cuatro archivos en dos (Arcos circulares y Arcos parabólicos) porque el número de hojas que se genera sería excesivo para una lectura directa de las pestañas que figuran en la parte inferior del libro.

El número de datos que se introduce es el mínimo imprescindible. Así, una vez elegida la directriz y tipología del arco a calcular (circular o parabólica, biarticulado o biempotrado), se proporciona la luz, la flecha, el desnivel entre apoyos, las características mecánicas del perfil que se selecciona y la carga vertical, horizontal y térmica.

De este modo, la hoja de cálculo, mediante la aplicación del método de los elementos finitos, resuelve la estructura, proporcionando la matriz de rigidez de la estructura, la matriz de rigidez geométrica, desplazamientos de los nodos con algún grado de libertad, reacciones en los apoyos y coeficiente crítico de pandeo, que corresponde al cálculo del pandeo por métodos matriciales.

⁽¹⁾ Matlab es marca registrada de The MathWorks Inc.

2.1. Validación de resultados.

Para comprobar resultados se ha realizado un gran número de cálculos, entre los que se va a seleccionar algún ejemplo.

Así, se pretende analizar un arco parabólico biempotrado de 30 m de luz y un rebajamiento $\frac{f}{l} = \frac{1}{6}$, o lo que es lo mismo, una flecha de 5 m. Este arco se ha predimensionado con un perfil IPN 300. Para poder comparar resultados con los programas matriciales mencionados, se decide discretizar el arco en diez tramos rectos de igual longitud (tabla 7.1).

Las hipótesis de carga empleadas corresponden a una carga vertical uniforme de 800 kg/m, una carga horizontal uniforme de viento de 480 kg/m y una carga térmica debida a un incremento de temperatura de 20°C.

Tabla 7.1. Coordenadas de los nodos tras la discretización de un arco parabólico de 30 m de luz, 5 m de flecha y apoyos a nivel en diez tramos.		
Nodo	x (m)	z (m)
0	0.000	0.000
1	2.744	1.662
2	5.636	3.051
3	8.665	4.108
4	11.804	4.773
5	15.004	5.000
6	18.205	4.772
7	21.343	4.106
8	24.372	3.048
9	27.263	1.658
10	30.000	0.000

En las tablas 7.2 a 7.10 se resumen los cálculos obtenidos con el archivo de Microsoft Excel nombrado como «Arcos parabólicos biempotrados», que se ha realizado siguiendo el método de los elementos finitos. De la tabla 7.2 a la 7.4 se presentan las deformaciones de los nodos del arco, de la 7.5 a la 7.7 los esfuerzos de los elementos en los que se ha discretizado el arco, y de la tabla 7.8 a la tabla 7.10 se muestran las reacciones de las distintas hipótesis de carga descritas.

Tabla 7.2.
Arcos parabólicos biempotrados.
Desplazamientos en la hipótesis de carga vertical uniforme.

Nodo	δ_x (cm)	δ_z (cm)	θ (rad ·100)
0	0.000	0.000	0.000
1	0.042	-0.162	-0.075
2	0.093	-0.374	-0.051
3	0.083	-0.477	-0.011
4	0.042	-0.483	0.006
5	0.000	-0.472	0.000
6	-0.042	-0.484	-0.006
7	-0.083	-0.477	0.011
8	-0.093	-0.374	0.051
9	-0.041	-0.161	0.075
10	0.000	0.000	0.000

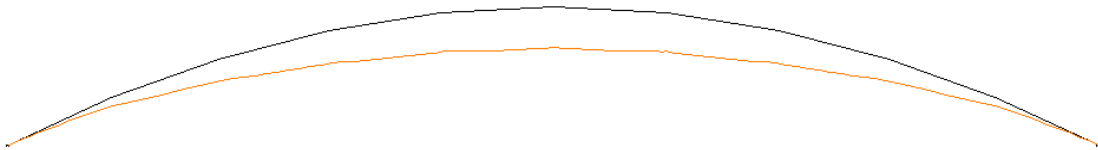


Figura 7.1. Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga vertical uniforme.

Tabla 7.3.
Arcos parabólicos biempotrados.
Desplazamientos en la hipótesis de carga horizontal uniforme.

Nodo	δ_x (cm)	δ_z (cm)	θ (rad ·100)
0	0.000	0.000	0.000
1	0.542	-0.877	-0.481
2	1.116	-2.057	-0.265
3	1.173	-2.208	0.166
4	0.948	-1.147	0.469
5	0.831	0.459	0.484
6	0.913	1.691	0.258
7	0.976	2.014	-0.053
8	0.776	1.456	-0.291
9	0.318	0.516	-0.314
10	0.000	0.000	0.000

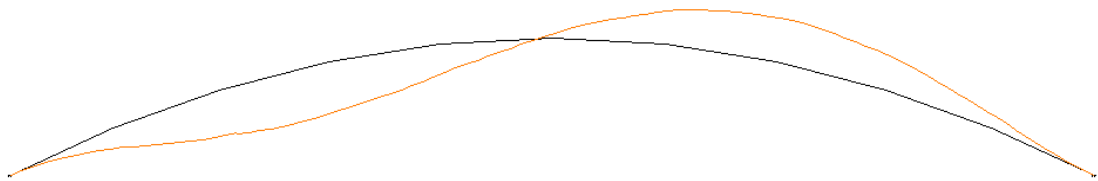


Figura 7.2. Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.

Tabla 7.4. Arcos parabólicos biempotrados. Desplazamientos en la hipótesis de carga térmica.			
Nodo	δ_x (cm)	δ_z (cm)	θ (rad · 100)
0	0.000	0.000	0.000
1	-0.004	0.155	0.075
2	-0.064	0.455	0.102
3	-0.096	0.782	0.091
4	-0.070	1.028	0.052
5	0.000	1.119	0.000
6	0.070	1.027	-0.053
7	0.096	0.781	-0.091
8	0.063	0.454	-0.102
9	0.004	0.154	-0.075
10	0.000	0.000	0.000

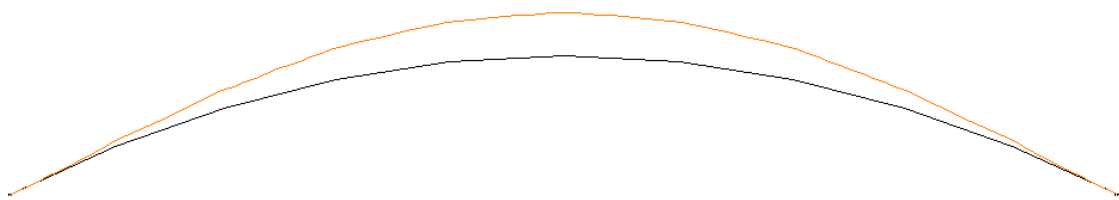


Figura 7.3. Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga térmica.

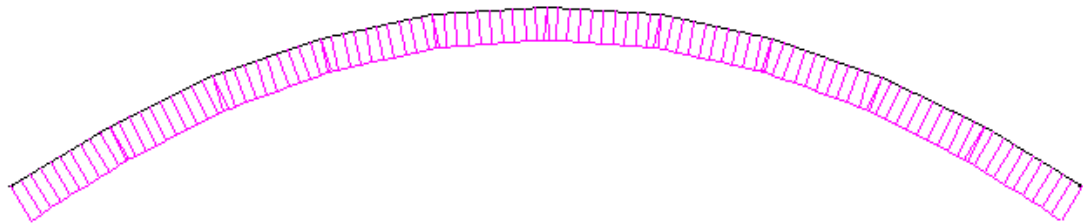


Figura 7.4. Axiles en un arco parabólico biempotrado ante una carga vertical uniforme.

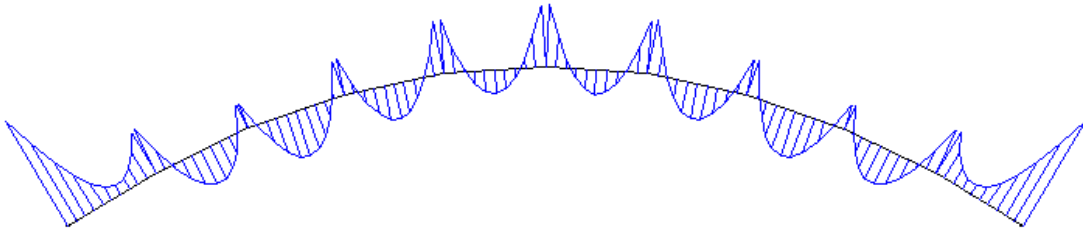


Figura 7.5. Momentos en un arco parabólico biempotrado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme.

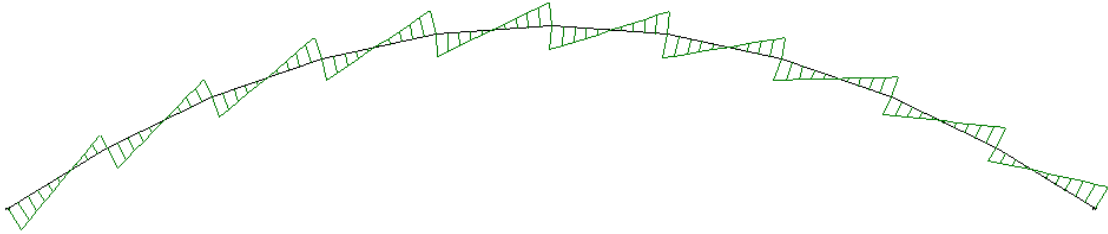


Figura 7.6. Esfuerzo cortante en un arco parabólico biempotrado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme.

<p>Tabla 7.5. Arcos parabólicos biempotrados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga vertical.</p>						
Elemento ij	Nodo i			Nodo j		
	$N(t)$	$Q(t)$	$M(t \cdot m)$	$N(t)$	$Q(t)$	$M(t \cdot m)$
1 (0-1)	-22.469	-1.392	-1.539	-21.139	0.804	-0.598
2 (1-2)	-21.118	-1.241	-0.597	-20.007	1.073	-0.330
3 (2-3)	-20.010	-1.175	-0.329	-19.156	1.249	-0.450
4 (3-4)	-19.160	-1.186	-0.450	-18.628	1.325	-0.674
5 (4-5)	-18.633	-1.249	-0.673	-18.452	1.312	-0.776
6 (5-6)	-18.452	-1.313	-0.776	-18.634	1.247	-0.673
7 (6-7)	-18.629	-1.326	-0.672	-19.162	1.185	-0.450
8 (7-8)	-19.158	-1.250	-0.449	-20.004	1.174	-0.329
9 (8-9)	-20.009	-1.073	-0.329	-21.122	1.240	-0.599
10 (9-10)	-21.143	-0.802	-0.598	-22.469	1.387	-1.536

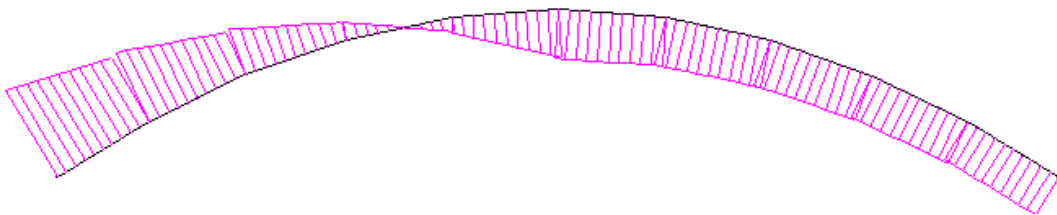


Figura 7.7. Axiles en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.

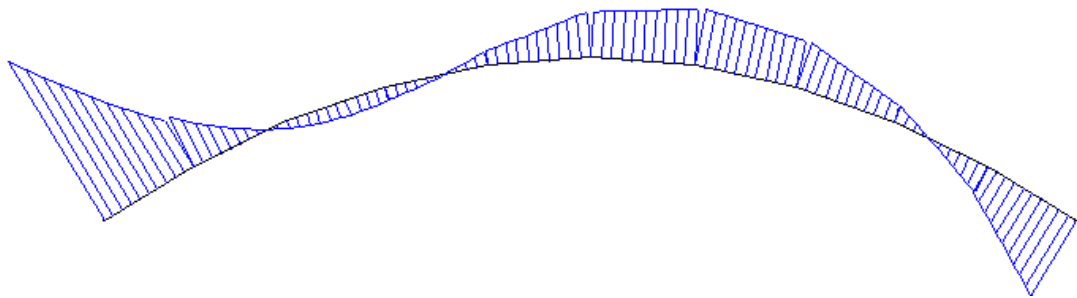


Figura 7.8. Momentos en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.

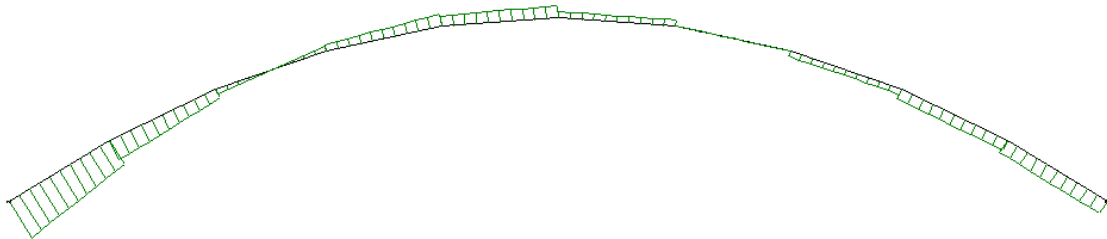


Figura 7.9. Cortante en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme.

<p>Tabla 7.6.</p> <p>Arcos parabólicos biempotrados.</p> <p>Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga horizontal.</p>						
Elemento <i>ij</i>	Nodo <i>i</i>			Nodo <i>j</i>		
	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)
1 (0-1)	4.839	-2.343	-6.416	3.522	-1.546	-0.179
2 (1-2)	3.655	-1.198	-0.179	2.267	-0.531	2.594
3 (2-3)	2.312	-0.274	2.595	0.858	0.233	2.659
4 (3-4)	0.821	0.340	2.659	-0.685	0.659	1.055
5 (4-5)	-0.770	0.559	1.055	-2.306	0.667	-0.913
6 (5-6)	-2.377	0.335	-0.913	-2.377	0.335	-1.988
7 (6-7)	-2.400	0.005	-1.988	-2.400	0.005	-2.005
8 (7-8)	-2.382	-0.299	-2.005	-2.382	-0.299	-1.047
9 (8-9)	-2.333	-0.564	-1.047	-2.333	-0.564	0.760
10 (9-10)	-2.268	-0.786	0.761	-2.268	-0.786	3.274

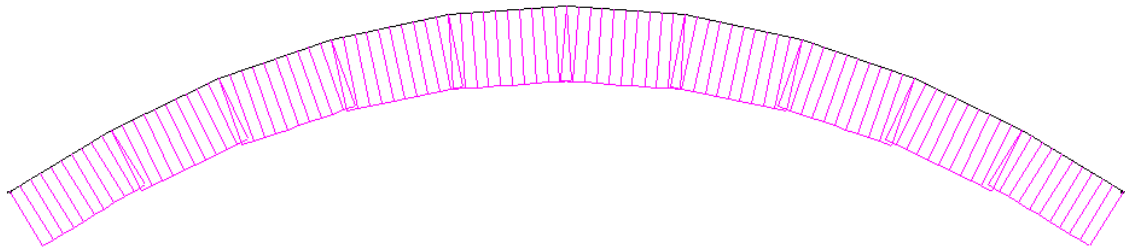


Figura 7.10. Axiles en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura.



Figura 7.11. Cortantes en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura.

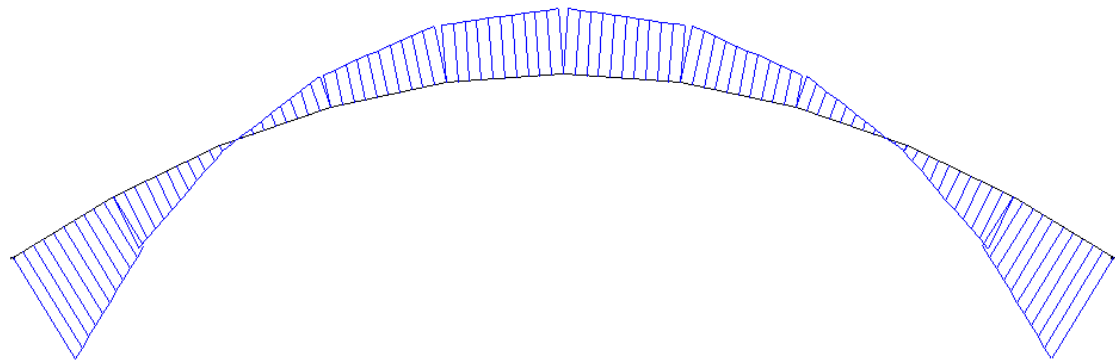


Figura 7.12. Momentos en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura.

<p>Tabla 7.7.</p> <p>Arcos parabólicos biempotrados.</p> <p>Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga térmica.</p>						
Elemento <i>ij</i>	Nodo <i>i</i>			Nodo <i>j</i>		
	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)
1 (0-1)	-0.173	0.105	0.650	-0.173	0.105	0.314
2 (1-2)	-0.182	0.087	0.314	-0.182	0.087	0.034
3 (2-3)	-0.191	0.067	0.034	-0.191	0.067	-0.180
4 (3-4)	-0.197	0.042	-0.180	-0.197	0.042	-0.314
5 (4-5)	-0.201	0.014	-0.314	-0.201	0.014	-0.360
6 (5-6)	-0.201	-0.014	-0.314	-0.201	-0.014	-0.360
7 (6-7)	-0.198	-0.042	-0.314	-0.198	-0.042	-0.179
8 (7-8)	-0.191	-0.067	-0.179	-0.191	-0.067	0.034
9 (8-9)	-0.182	-0.088	0.034	-0.182	-0.088	0.315
10 (9-10)	-0.173	-0.105	0.315	-0.173	-0.105	0.650

Tabla 7.8. Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga vertical.			
Extremo	R_x (t)	R_z (t)	M (t·m)
A (Nodo 0)	18.498	12.830	1.539
B (Nodo 11)	-18.498	12.830	-1.536

Tabla 7.9. Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga horizontal			
Extremo	R_x (t)	R_z (t)	M (t·m)
A (Nodo 0)	-5.353	-0.503	6.416
B (Nodo 11)	-2.347	0.503	3.274

Tabla 7.10. Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga térmica.			
Extremo	R_x (t)	R_z (t)	M (t·m)
A (Nodo 0)	0.202	0.000	-0.650
B (Nodo 11)	-0.202	0.000	0.650

Como cabría esperar (Oñate, 1995; Hughes, 2000; Zienkiewicz y Taylor, 2000a; Felippa, 2001a, al emplear elementos de pórtico plano con la misma hipótesis de distribución lineal de desplazamientos que en el cálculo matricial, conduce a los mismos resultados en los nodos del arco discretizado que en los nudos de las aplicaciones que utilizan métodos matriciales puros.

El cálculo manual que propone Leontovich (1983) para arcos biempotrados con un rebajamiento inferior a 0.20, donde tiene importancia práctica la deformación axial, conduce a:

- Carga vertical uniformemente repartida

Las reacciones se obtienen mediante las expresiones:

$$H_1 = H_2 = \frac{W \cdot l}{8 \cdot f \cdot (1 + G)}$$

W es la carga total, de valor igual a la intensidad de carga (800 kg/m) por la luz, l es la luz del arco y f la flecha. Además, G viene definida por:

$$G = \frac{d_{1.5}^2 \cdot \tau}{f^2}$$

donde $d_{1.5}$ es el espesor del arco en la clave y τ es una constante numérica definida según el rebajamiento, 0.825 en este caso.

$$H_1 = -H_2 = \frac{W \cdot l}{8 \cdot f \cdot (1 + G)} = \frac{800 \cdot 30^2}{8 \cdot 5 \cdot \left(1 + \frac{0.3^2 \cdot 0.825}{5^2}\right)} = 17947 \text{ kg}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{W}{2} = \frac{800 \cdot 30}{2} = 12000 \text{ kg}$$

$$M_1 = M_2 = -\frac{W \cdot l}{12} \cdot \left(\frac{G}{1 + G}\right) = -\frac{800 \cdot 30^2}{12} \cdot \left(\frac{0.00297}{1.00297}\right) = -178 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Para obtener los esfuerzos en una sección genérica (x , z), en esta hipótesis de carga se propone:

$$M_x = M_1 + \frac{W}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x - H_1 \cdot z$$

$$\text{Para } x \leq \frac{l}{2} \quad Q_x = -H_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi + \frac{W}{2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{l}\right) \cdot \cos \varphi$$

$$N_x = H_1 \cdot \cos \varphi + \frac{W}{2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{l}\right) \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$\text{Para } x > \frac{l}{2} \quad Q_x = H_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi + \frac{W}{2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{l}\right) \cdot \cos \varphi$$

$$N_x = H_1 \cdot \cos \varphi - \frac{W}{2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x}{l}\right) \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

siendo φ el ángulo que forma la tangente trazada por la sección con la horizontal.

Seleccionando una sección genérica coincidente con el nodo 4, de coordenadas (11.804, 4.773), con $\varphi = 0.20871$ rad, se obtiene:

$$M_x = -178 + \frac{800 \cdot 30}{2} \cdot \left(1 - \frac{11.804}{30}\right) \cdot 11.804 - 17947 \cdot 4.773 = 75 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$Q_x = -17947 \cdot \sin 0.20871 + \frac{800 \cdot 30}{2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 11.804}{30}\right) \cdot \cos 0.20871 = -1217 \text{ kg}$$

$$N_x = 17947 \cdot \cos 0.20871 + \frac{800 \cdot 30}{2} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 11.804}{30}\right) \cdot \sin 0.20871 = 18087 \text{ kg}$$

Tanto en el caso de las reacciones como en el de los esfuerzos puede comprobarse que la distorsión mayor en los resultados obtenidos se produce al determinar los momentos. Sin embargo, en el cálculo de los esfuerzos cortantes y normales, y en el de las componentes horizontal y vertical de la reacción, los errores cometidos en el cálculo simplificado son inferiores al 8%.

- Carga horizontal uniformemente repartida sobre la mitad del arco

Las reacciones se obtienen mediante las expresiones:

$$H_1 = -\frac{201}{256} \cdot W$$

W es la carga total, que en este caso vale $W = \frac{q \cdot l}{2}$, siendo q la carga horizontal uniforme (480 kg/m) y l la luz del arco.

$$H_1 = -\frac{201}{256} \cdot \frac{480 \cdot 30}{2} = -5653 \text{ kg}$$

$$H_2 = -\frac{55}{256} \cdot \frac{480 \cdot 30}{2} = -1547 \text{ kg}$$

$$V_1 = -V_2 = -\frac{W \cdot f}{4 \cdot l} = \frac{480 \cdot 30 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 30} = -300 \text{ kg}$$

$$M_1 = -\frac{W \cdot f}{8} \cdot \left(\frac{117}{256} + 1\right) = -\frac{480 \cdot 30 \cdot 5}{2 \cdot 8} \cdot \left(\frac{117}{256} + 1\right) = -6557 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = -\frac{W \cdot f}{8} \cdot \left(\frac{117}{256} - 1\right) = -\frac{480 \cdot 30 \cdot 5}{2 \cdot 8} \cdot \left(\frac{117}{256} - 1\right) = 2443 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Si se comparan estos resultados con los proporcionados por la tabla 7.9 se puede comprobar que los errores no son importantes tomados como magnitudes absolutas, aunque sí son significativos si se manejan cifras relativas.

Para obtener los esfuerzos en una sección genérica (x, z) , en esta hipótesis de carga se propone:

$$\begin{aligned} \text{Para } x \leq \frac{l}{2} \quad M_x &= M_1 + V_1 \cdot x - H_1 \cdot z - \frac{W \cdot z^2}{2 \cdot f} \\ N_x &= \left(H_1 + \frac{W \cdot z}{f} \right) \cdot \cos \varphi + V_1 \cdot \sin \varphi \\ Q_x &= - \left(H_1 + \frac{W \cdot z}{f} \right) \cdot \sin \varphi + V_1 \cdot \cos \varphi \\ \text{Para } x > \frac{l}{2} \quad M_x &= \frac{139 \cdot W \cdot f}{2.048} + V_2 \cdot (l - x) - H_2 \cdot z \\ N_x &= (W + H_1) \cdot \cos \varphi - V_1 \cdot \sin \varphi \\ Q_x &= (W + H_1) \cdot \sin \varphi + V_1 \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

siendo φ el ángulo que forma la tangente trazada por la sección con la horizontal.

Si se selecciona la misma sección anterior, se tiene:

$$M_x = -6557 - 300 \cdot 11.804 + 5653 \cdot 4.773 - \frac{480 \cdot 30 \cdot 4.773^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 481 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$N_x = \left(-5653 + \frac{480 \cdot 30 \cdot 4.773}{2 \cdot 5} \right) \cdot \cos 0.20871 - 300 \cdot \sin 0.20871 = 1131 \text{ kg}$$

$$Q_x = - \left(-5653 + \frac{480 \cdot 30 \cdot 4.773}{2 \cdot 5} \right) \cdot \sin 0.20871 - 300 \cdot \cos 0.20871 = -546 \text{ kg}$$

En todos los casos hay diferencias significativas con los resultados presentados en la tabla 7.6.

- Efecto de la variación de temperatura.

Para un incremento de temperatura de 20°C, se obtiene:

$$M_1 = M_2 = \frac{15 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t}{2 \cdot f} \cdot E \cdot I$$

siendo α_t el coeficiente de dilatación del acero ($1.2 \cdot 10^{-5}$ m/m.°C, e I el momento de inercia del perfil seleccionado (IPN 300 en este caso).

$$M_1 = M_2 = \frac{15 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 20}{2 \cdot 5} \cdot 2.1 \cdot 10^{10} \cdot 9.8 \cdot 10^{-5} = 741 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$H_1 = H_2 = \frac{3 \cdot M_1}{2 \cdot f} = \frac{3 \cdot 741}{2 \cdot 5} = 222 \text{ kg}$$

$$V_1 = V_2 = 0 \text{ kg}$$

Los esfuerzos son:

$$M_x = M_1 - H_1 \cdot z$$

$$N_x = H_1 \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Para } x \leq \frac{l}{2} \quad Q_x = -H_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$\text{Para } x > \frac{l}{2} \quad Q_x = H_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Por tanto, en la sección de estudio:

$$M_x = 741 - 222 \cdot 4.773 = -319 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$N_x = H_1 \cdot \cos \varphi = 222 \cdot \cos 0.20871 = 217 \text{ kg}$$

$$Q_x = -H_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi = -222 \cdot \operatorname{sen} 0.20871 = -46 \text{ kg}$$

Tanto las reacciones como los esfuerzos coinciden con los obtenidos mediante expresiones matriciales (tablas 7.10 y 7.7, respectivamente).

Se va a estudiar el mismo arco variando las condiciones de sustentación, para de este modo analizar también su influencia. En este caso se va a emplear la hoja de cálculo «Arcos parabólicos biarticulados», y los resultados que se obtienen para un arco sometido a las mismas cargas y dimensionado con idéntico perfil, se recogen en las tablas 7.11 a 7.19.

En estas tablas se resumen los cálculos obtenidos con el archivo de Microsoft Excel nombrado como «Arcos parabólicos biarticulados», que se ha realizado siguiendo el método de los elementos finitos. Al igual que ocurría con los arcos biempotrados los resultados coinciden con los obtenidos por métodos matriciales puros.

Tabla 7.11. Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga vertical uniforme.			
Nodo	δ_x (cm)	δ_z (cm)	θ (rad ·100)
0	0.000	0.000	-0.217
1	0.231	-0.475	-0.103
2	0.243	-0.609	0.017
3	0.144	-0.457	0.079
4	0.050	-0.220	0.065
5	0.000	-0.112	0.000
6	-0.049	-0.220	-0.065
7	-0.143	-0.455	-0.079
8	-0.242	-0.607	-0.017
9	-0.229	-0.473	0.103
10	0.000	0.000	0.216

Tabla 7.12. Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga horizontal uniforme.			
Nodo	δ_x (cm)	δ_z (cm)	θ (rad ·100)
0	0.000	0.000	-1.541
1	2.339	-3.386	-1.143
2	3.360	-5.955	-0.285
3	3.197	-5.480	0.563
4	2.627	-2.793	1.074
5	2.366	0.829	1.110
6	2.578	3.880	0.744
7	2.879	5.330	0.160
8	2.713	4.875	-0.451
9	1.728	2.841	-0.920
10	0.000	0.000	-1.099

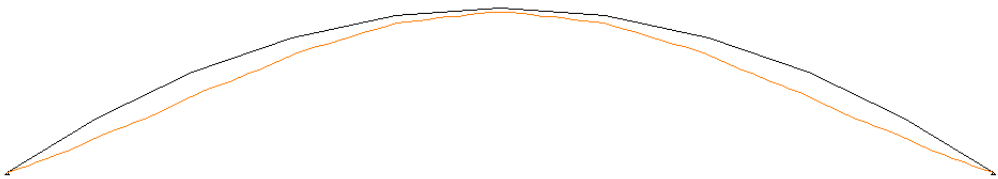


Figura 7.13. Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga vertical uniforme.

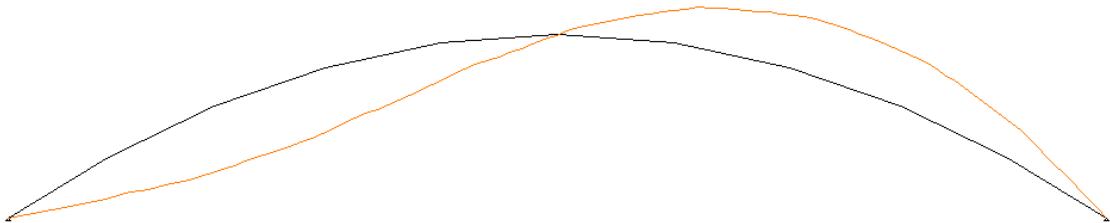


Figura 7.14. Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme.

<p>Tabla 7.13.</p> <p>Arcos parabólicos biarticulados.</p> <p>Desplazamientos en la hipótesis de carga térmica.</p>			
Nodo	δ_x (cm)	δ_z (cm)	θ (rad · 100)
0	0.000	0.000	0.092
1	-0.084	0.287	0.087
2	-0.127	0.554	0.073
3	-0.122	0.773	0.053
4	-0.073	0.916	0.028
5	0.000	0.967	0.000
6	0.074	0.916	-0.028
7	0.122	0.772	-0.053
8	0.127	0.553	-0.073
9	0.084	0.286	-0.87
10	0.000	0.000	-0.092

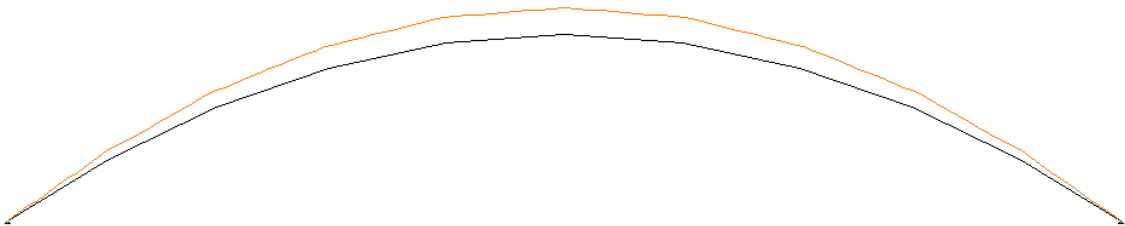


Figura 7.15. Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga térmica.

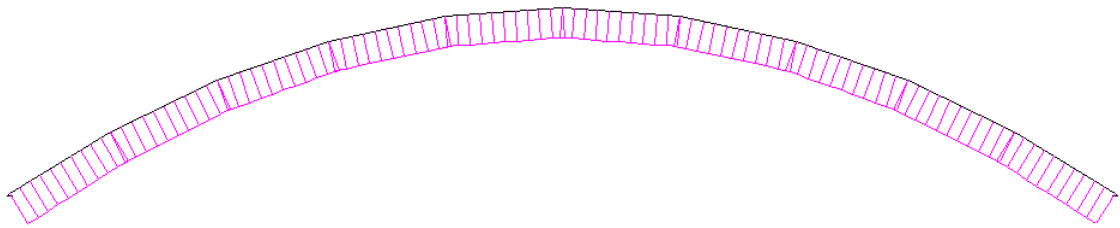


Figura 7.16. Axiles en un arco parabólico biarticulado ante una carga vertical uniforme.

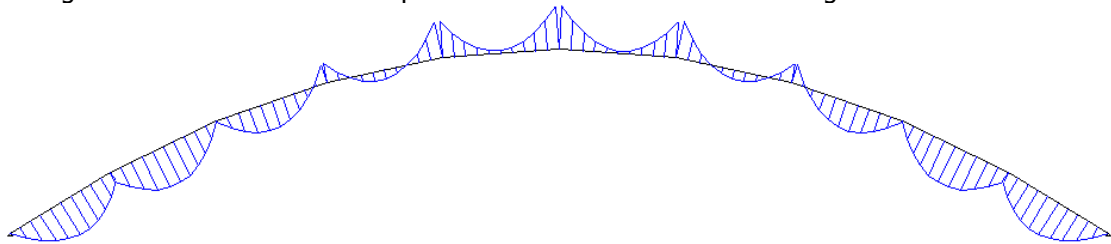


Figura 7.17. Momentos en un arco parabólico biarticulado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme.

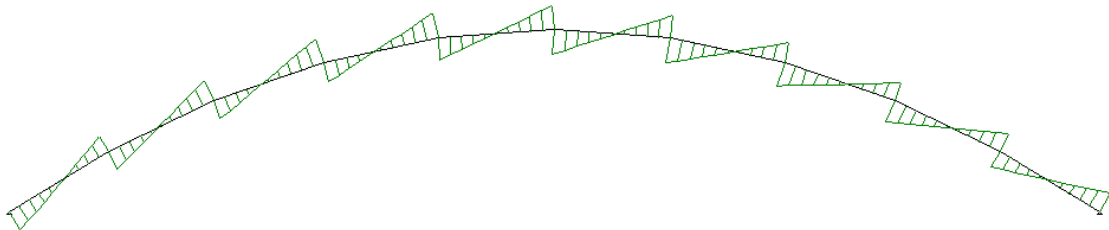


Figura 7.18. Esfuerzo cortante en un arco parabólico biarticulado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme.

<p>Tabla 7.14.</p> <p>Arcos parabólicos biarticulados.</p> <p>Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga vertical.</p>						
Elemento <i>ij</i>	Nodo <i>i</i>			Nodo <i>j</i>		
	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)
1 (0-1)	-22.804	-1.189	0.000	-21.474	1.007	0.291
2 (1-2)	-21.471	-1.071	0.291	-20.360	1.242	0.015
3 (2-3)	-20.371	-1.046	0.015	-19.525	1.378	-0.520
4 (3-4)	-19.543	-1.105	-0.519	-19.011	1.406	-1.004
5 (4-5)	-19.024	-1.221	-1.003	-18.842	1.339	-1.195
6 (5-6)	-18.842	-1.340	-1.195	-19.025	1.220	-1.003
7 (6-7)	-19.012	-1.407	-1.003	-19.545	1.104	-0.519
8 (7-8)	-19.527	-1.379	-0.519	-20.373	1.045	0.015
9 (8-9)	20.362	-1.243	0.015	-21.474	1.071	0.289
10 (9-10)	-21.478	-1.005	0.289	-22.804	1.184	0.000

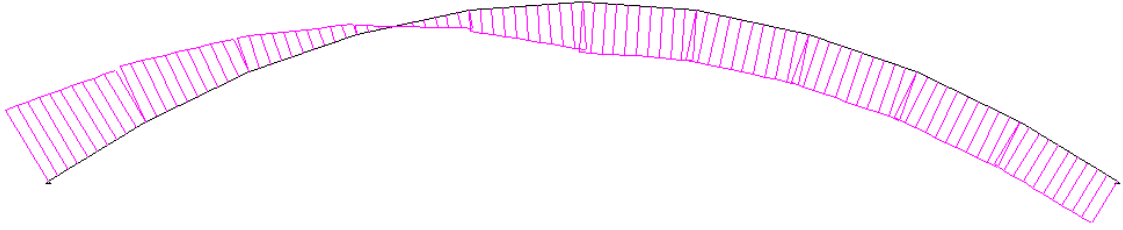


Figura 7.19. Axiles en un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme.

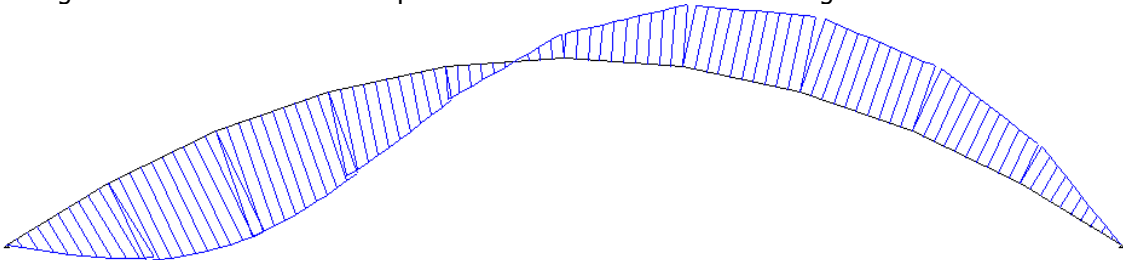


Figura 7.20. Momentos en un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme.

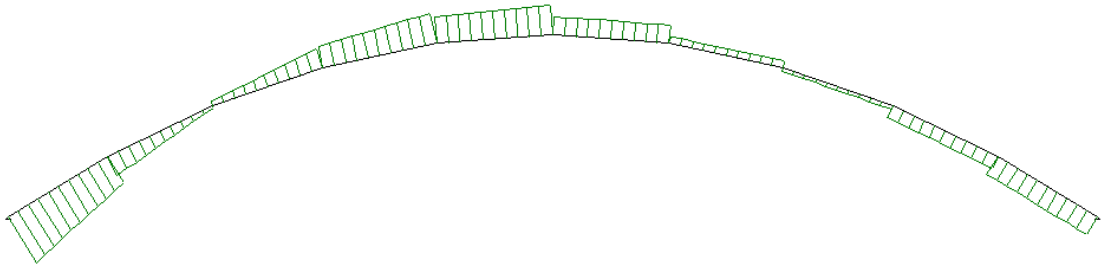


Figura 7.21. Cortante en un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme.

Tabla 7.15. Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga horizontal.						
Elemento <i>ij</i>	Nodo <i>i</i>			Nodo <i>j</i>		
	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)
1 (0-1)	4.664	-1.860	0.000	3.347	-1.062	4.686
2 (1-2)	3.434	-0.734	4.687	2.046	-0.067	5.970
3 (2-3)	2.041	0.162	5.970	0.587	0.670	4.633
4 (3-4)	0.497	0.739	4.634	-1.010	1.058	1.750
5 (4-5)	-1.146	0.909	1.750	-2.682	1.018	-1.343
6 (5-6)	-2.799	0.628	-1.343	-2.799	0.628	-3.360
7 (6-7)	-2.859	0.238	-3.360	-2.859	0.238	-4.124
8 (7-8)	-2.866	-0.126	-4.124	-2.866	-0.126	-3.722
9 (8-9)	-2.834	-0.446	-3.721	-2.834	-0.446	-2.293
10 (9-10)	-2.778	-0.717	-2.292	-2.778	-0.717	0.000

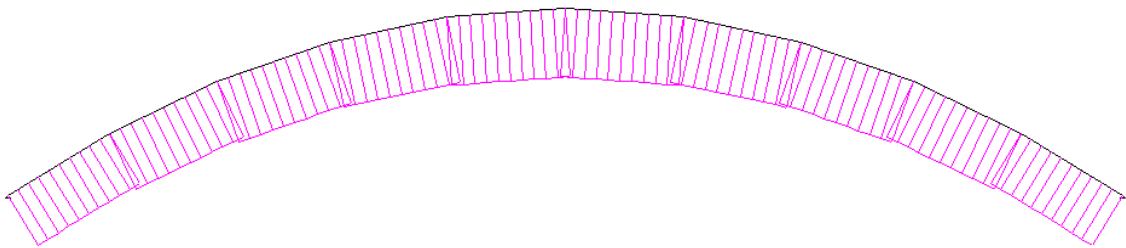


Figura 7.22. Axiles en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.

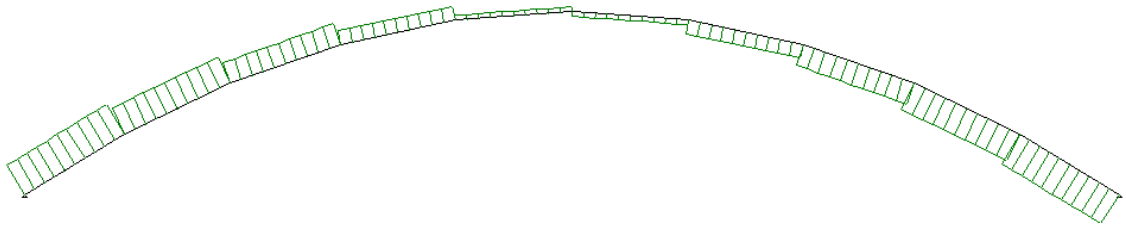


Figura 7.23. Cortantes en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.

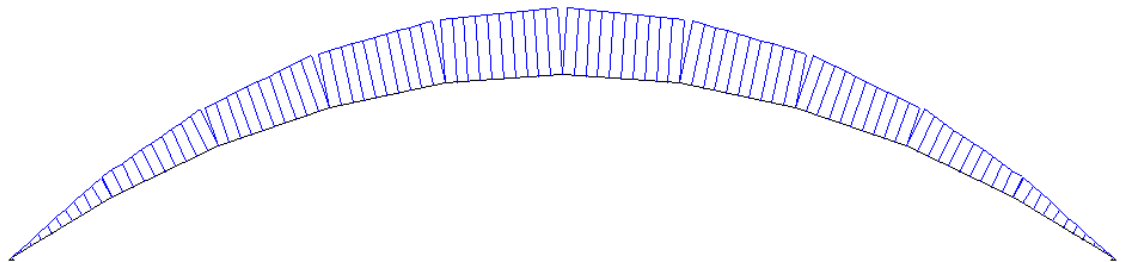


Figura 7.24. Momentos en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.

Tabla 7.16. Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga térmica.						
Elemento <i>ij</i>	Nodo <i>i</i>			Nodo <i>j</i>		
	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)	<i>N</i> (t)	<i>Q</i> (t)	<i>M</i> (t·m)
1 (0-1)	-0.031	0.019	0.000	-0.031	0.019	-0.061
2 (1-2)	-0.033	0.016	-0.061	-0.033	0.016	-0.111
3 (2-3)	-0.034	0.012	-0.111	-0.034	0.012	-0.150
4 (3-4)	-0.036	0.008	-0.150	-0.036	0.008	-0.174
5 (4-5)	-0.036	0.003	-0.174	-0.036	0.003	-0.183
6 (5-6)	-0.036	-0.003	-0.183	-0.036	-0.003	-0.174
7 (6-7)	-0.036	-0.008	-0.174	-0.036	-0.008	-0.150
8 (7-8)	-0.034	-0.012	-0.150	-0.034	-0.012	-0.111
9 (8-9)	-0.033	-0.016	-0.111	-0.033	-0.016	-0.061
10 (9-10)	-0.031	-0.019	-0.061	-0.031	-0.019	0.000

Tabla 7.17. Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga vertical.			
Extremo	R_x (t)	R_z (t)	M (t·m)
A (Nodo 0)	18.889	12.890	0.000
B (Nodo 11)	-18.889	12.890	0.000

Tabla 7.18. Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga horizontal			
Extremo	R_x (t)	R_z (t)	M (t·m)
A (Nodo 0)	-4.953	-0.826	0.000
B (Nodo 11)	-2.747	0.826	0.000

Tabla 7.19. Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga térmica.			
Extremo	R_x (t)	R_z (t)	M (t·m)
A (Nodo 0)	0.037	0.000	0.000
B (Nodo 11)	-0.037	0.000	0.000

De la misma forma como se operó con los arcos biempotrados, se va a proceder a realizar el cálculo manual siguiendo la metodología propuesta por Leontovich (1983):

- Carga vertical uniformemente repartida

Las reacciones se obtienen mediante las expresiones:

$$H_1 = -H_2 = \frac{W \cdot l}{8 \cdot f}$$

donde W es la carga total, de valor igual a la intensidad de carga (800 kg/m) por la luz del arco.

$$H_1 = -H_2 = \frac{W \cdot l}{8 \cdot f} = \frac{800 \cdot 30^2}{8 \cdot 5} = 18000 \text{ kg}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{W}{2} = \frac{800 \cdot 30}{2} = 12000 \text{ kg}$$

$$M_1 = M_2 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Leontovich determina que son nulos los momentos flectores y el esfuerzo cortante en toda sección del arco. Con respecto al esfuerzo normal:

$$\text{Para } x \leq \frac{l}{2} \quad N_x = H_1 \cdot \cos \varphi + W \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Para } x > \frac{l}{2} \quad N_x = H_1 \cdot \cos \varphi + W \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \cdot \sin \varphi$$

siendo φ el ángulo que forma la tangente trazada por la sección con la horizontal.

Seleccionando la misma sección genérica que en el caso de los arcos biempotrados, esto es, la sección coincidente con el nodo 4, de coordenadas (11.804, 4.773), con $\varphi = 0.20871$ rad, se obtiene:

$$N_x = 18000 \cdot \cos 0.20871 + 800 \cdot 30 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{11.804}{30} \right) \cdot \sin 0.20871 = 18139 \text{ kg}$$

Se puede comprobar como los resultados obtenidos difieren menos del 7% respecto a los que se consiguen con cálculos más exactos. Sin embargo, el desprecio de los momentos y cortante en cualquier sección hacen estar claramente del lado de la inseguridad al calculista que decida optar por estos métodos simplificados de obtención de solicitaciones.

- Carga horizontal uniformemente repartida sobre la mitad del arco

Las reacciones se obtienen mediante las expresiones:

$$H_1 = -\frac{5}{7} \cdot W$$

W es la carga total, que en este caso vale $W = \frac{q \cdot l}{2}$, siendo q la carga horizontal uniforme (480 kg/m) y l la luz del arco.

$$H_1 = -\frac{5}{7} \cdot \frac{480 \cdot 30}{2} = -5143 \text{ kg}$$

$$H_2 = -\frac{2}{7} \cdot W = -\frac{2}{7} \cdot \frac{480 \cdot 30}{2} = -2057 \text{ kg}$$

$$V_1 = -V_2 = -\frac{W \cdot f}{2 \cdot l} = \frac{480 \cdot 30 \cdot 5}{2 \cdot 30} = -1200 \text{ kg}$$

$$M_1 = M_2 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Si se comparan estos resultados con los proporcionados por la tabla 7.18 se puede comprobar que los errores no son importantes tomados como magnitudes absolutas, aunque sí son significativos si se manejan cifras relativas, sobre todo con las reacciones verticales y el empuje horizontal H_2 .

Para obtener los esfuerzos en una sección genérica (x, z) , en esta hipótesis de carga se propone:

$$\begin{aligned} \text{Para } x \leq \frac{l}{2} \quad M_x &= -\frac{W \cdot f}{2} \cdot \left(\frac{x}{l} + \frac{z^2}{f^2} \right) - H_1 \cdot z \\ N_x &= \left(H_1 + \frac{W \cdot z}{f} \right) \cdot \cos \varphi - \frac{W \cdot f}{2 \cdot l} \cdot \operatorname{sen} \varphi \\ Q_x &= -\left(H_1 + \frac{W \cdot z}{f} \right) \cdot \operatorname{sen} \varphi - \frac{W \cdot f}{2 \cdot l} \cdot \cos \varphi \\ \text{Para } x > \frac{l}{2} \quad M_x &= \frac{W \cdot f}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{l} \right) + H_2 \cdot z \\ N_x &= (H_1 + W) \cdot \cos \varphi + \frac{W \cdot f}{2 \cdot l} \cdot \operatorname{sen} \varphi \\ Q_x &= (H_1 + W) \cdot \operatorname{sen} \varphi - \frac{W \cdot f}{2 \cdot l} \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

siendo φ el ángulo que forma la tangente trazada por la sección con la horizontal.

Si se selecciona la misma sección anterior, se tiene:

$$M_x = -\frac{480 \cdot 30 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot \left(\frac{11.804}{30} + \frac{4.773^2}{5^2} \right) - 5143 \cdot 4.773 = -48033 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$N_x = \left(-5143 + \frac{480 \cdot 30 \cdot 4.773}{2 \cdot 5} \right) \cdot \cos 0.20871 - \frac{480 \cdot 30 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 30} \cdot \operatorname{sen} 0.20871 = 1568 \text{ kg}$$

$$Q_x = -\left(-5143 + \frac{480 \cdot 30 \cdot 4.773}{2 \cdot 5}\right) \cdot \text{sen} 0.20871 - \frac{480 \cdot 30 \cdot 5}{2 \cdot 30} \cdot \cos 0.20871 = -815 \text{ kg}$$

Los momentos presentan diferencias sustanciales con los resultados recogidos en la tabla 7.15. Los esfuerzos normales y cortantes, aunque próximos en cifras absolutas, también difieren porcentualmente de manera significativa respecto a los esfuerzos obtenidos mediante el método de los elementos finitos.

- Efecto de la variación de temperatura.

Para un incremento de temperatura de 20°C, se obtiene:

$$H_1 = -H_2 = \frac{15 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t}{8 \cdot f^2} \cdot E \cdot I$$

siendo α_t el coeficiente de dilatación del acero ($1.2 \cdot 10^{-5}$ m/m.°C, e I el momento de inercia del perfil seleccionado (IPN 300 en este caso).

$$H_1 = -H_2 = \frac{15 \cdot 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 20}{8 \cdot 5^2} \cdot 2.1 \cdot 10^{10} \cdot 9.8 \cdot 10^{-5} = 37 \text{ kg}$$

$$M_1 = M_2 = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$V_1 = V_2 = 0 \text{ kg}$$

Los esfuerzos son:

$$M_x = -H_1 \cdot z$$

$$N_x = H_1 \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Para } x \leq \frac{l}{2} \quad Q_x = -H_1 \cdot \text{sen} \varphi$$

$$\text{Para } x > \frac{l}{2} \quad Q_x = H_1 \cdot \text{sen} \varphi$$

Por tanto, en la sección de estudio:

$$M_x = -37 \cdot 4.773 = -177 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$N_x = H_1 \cdot \cos \varphi = 37 \cdot \cos 0.20871 = 37 \text{ kg}$$

$$Q_x = -H_1 \cdot \text{sen}\varphi = -37 \cdot \text{sen}0.20871 = -8 \text{ kg}$$

Tanto las reacciones como los esfuerzos coinciden con los obtenidos mediante expresiones matriciales (tablas 7.16 y 7.19, respectivamente).

3. Pandeo de arcos.

Una vez realizado el cálculo estático del arco, se continúa con el cálculo del pandeo del arco. Para ello se obtiene la matriz de rigidez geométrica de la estructura y, como se describió en el apartado 5.3 del Capítulo 6, se resuelve la ecuación [6.20], definida así:

$$\left| [K^*] - N_0 \cdot [K_g^*] \right| = 0$$

donde

$[K^*]$	es la matriz de rigidez reducida del arco, lo que significa que únicamente contiene los coeficientes de los nodos con algún grado de libertad, en coordenadas globales;
$[K_g^*]$	es la matriz de rigidez geométrica reducida del sistema en coordenadas globales;
N_0	es el esfuerzo axial real de compresión de un elemento del arco, que sirve de referencia para definir en forma porcentual los axiles de los restantes elementos de pórtico plano. Se suele utilizar el axil máximo.

La primera solución del determinante proporciona el coeficiente crítico de pandeo α_{cr} , para obtener a partir de él el coeficiente de esbeltez β y el coeficiente de pandeo ϖ , necesarios para el dimensionamiento correcto del arco.

3.1. Cálculo del pandeo mediante análisis de autovalores.

Se han realizado multitud de análisis de arcos con el objetivo de determinar desplazamientos, esfuerzos, reacciones y la determinación del coeficiente crítico de pandeo para cada hipótesis de carga. Desde el punto de vista numérico, mediante las hojas de cálculo se obtienen valores coincidentes con los que consiguen con las aplicaciones informáticas matriciales que implementan el análisis de autovalores, esto es, con *Pandeo y Cespla*.

Con ANSYS se ha llevado acabo un estudio profundo de los arcos con el objetivo final de poder continuar los cálculos estáticos con el análisis del pandeo no lineal de los arcos, no introducido en las hojas de cálculo.

Se ha analizado el pandeo en arcos biarticulados y biempotrados, de directriz parabólica y de directriz circular, con luces comprendidas entre los 20 y 40 m y rebajamientos que oscilan entre 1/5 y 1/10, para analizar tanto arcos peraltados como arcos rebajados, atendiendo a los límites de 1/7 (Celigüeta, 1998) y de 1/10 (García de Arangoá, 1971) que sirven de frontera entre ambos tipos de estructuras.

Para el cálculo se han considerado dos secciones diferentes, IPN 300 e IPN 400, con la intención de cumplir con las exigencias de resistencia y pandeo en las dos series estudiadas.

En principio, una vez definida la geometría del arco, sus condiciones de sustentación e introducidas algunas características mecánicas del acero y del perfil seleccionado, se sometió al arco a su peso propio, para comenzar el análisis estático de la estructura y continuar con la obtención de los autovalores que determinan las condiciones del primer modo de pandeo.

En primer lugar se incluyen dos tablas, la 7.20 y 7.21, que incorporan las longitudes de los arcos parabólicos y circulares, con las relaciones flecha-luz antes mencionadas.

Tabla 7.20. Longitudes de arcos parabólicos (m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	21.952	21.384	21.029	20.793	20.510
25	27.443	26.733	26.289	25.995	25.641
30	32.934	32.082	31.549	31.196	30.771
35	38.425	37.430	36.809	36.397	35.901
40	43.916	42.779	42.069	41.598	41.032

Tabla 7.21. Longitudes de arcos circulares (m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	22.069	21.450	21.071	20.823	20.529
25	27.587	26.813	26.339	26.029	25.661
30	33.104	32.175	31.607	31.235	30.794
35	38.621	37.538	36.875	36.441	35.926
40	44.139	42.900	42.143	41.646	41.058

Se puede comprobar la casi coincidencia entre la longitud de un arco para una luz y flecha determinadas y las directrices empleadas en el estudio, pues en el arco circular es un 1-5 por mil superior a la del arco parabólico.

Tabla 7.22. Angulo α que forman en el arranque los arcos parabólicos (rad).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	0.67025	0.58361	0.51496	0.45970	0.37703
25	0.67030	0.58367	0.51501	0.45974	0.37707
30	0.67034	0.58370	0.51504	0.45977	0.37709
35	0.67037	0.58373	0.51506	0.45979	0.37711
40	0.67039	0.58374	0.51508	0.45981	0.37712

Tabla 7.23. Angulo α que forman en el arranque los arcos circulares (rad).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	0.75340	0.63707	0.55103	0.48506	0.39084
25	0.75340	0.63707	0.55103	0.48506	0.39084
30	0.75340	0.63707	0.55103	0.48506	0.39084
35	0.75340	0.63707	0.55103	0.48506	0.39084
40	0.75340	0.63707	0.55103	0.48506	0.39084

En las tablas 7.22 y 7.23 se incluyen los ángulos que forman los arcos en el arranque, dato que será de interés para cálculos posteriores. Se mantiene el

mismo formato en ambas tablas para facilitar comprobaciones, aunque puede comprobarse que en arcos circulares el ángulo que forma el arco en el arranque es independiente de la luz.

Una vez mostradas las características geométricas de los arcos circulares y parabólicos, se van a introducir las tablas 7.24 a 7.47 que recogen el coeficiente crítico de pandeo, el esfuerzo axil crítico y la carga crítica de pandeo, tanto para arcos parabólicos como circulares, así como con los extremos empotrados y articulados. Además, estas tablas se repiten para los perfiles IPN 300 e IPN 400 reseñados con anterioridad.

- IPN 300

Tabla 7.24. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biempotrados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	484.170	438.981	397.300	361.206	304.552
25	247.159	223.749	202.139	183.394	153.872
30	142.801	129.167	116.577	105.646	88.399
35	89.839	81.221	73.260	66.345	55.423
40	60.147	54.359	49.012	44.366	37.022

Tabla 7.25. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biarticulados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	211.796	197.076	180.994	165.837	140.343
25	108.386	100.827	92.570	84.788	71.693
30	62.707	58.325	53.540	49.029	41.438
35	39.482	36.720	33.704	30.861	26.075
40	26.447	24.596	22.574	20.668	17.460

Tabla 7.26. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biempotrados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	472.685	431.860	392.637	358.011	302.886
25	241.284	220.103	199.747	181.753	153.012
30	139.402	127.057	115.191	104.694	87.899
35	87.699	79.892	72.387	65.745	55.107
40	58.714	53.469	48.427	43.964	36.810

Tabla 7.27. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biarticulados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	213.068	198.612	182.318	166.894	140.994
25	109.041	101.616	93.250	85.331	72.027
30	63.086	58.782	53.934	49.344	41.632
35	39.722	37.009	33.953	31.060	26.198
40	26.608	24.789	22.741	20.801	17.542

Analizando las tablas 7.24 a 7.27 se puede comprobar como el coeficiente crítico de pandeo es ligeramente mayor, entre un 6 y un 24 por mil, en arcos biempotrados de directriz parabólica que en los circulares. Las diferencias mayores se producen en los arcos más peraltados, dándose las menores para el rebajamiento 1/10.

En cambio, en los arcos con los extremos articulados sucede lo contrario, pues son los arcos de directriz circular los que presentan un coeficiente crítico de pandeo superior al de los arcos parabólicos, entre un 5 y un 8 por mil, produciéndose la mayor diferencia en los arcos con una relación flecha-luz de 1/6.

Si lo que se analiza es la diferencia entre el coeficiente crítico de pandeo entre arcos biempotrados y biarticulados, entonces sí se obtienen diferencias significativas. En arcos parabólicos, el coeficiente crítico de pandeo es entre un 43.7% y un 47.2% inferior en los arcos biarticulados que en los de extremos empotrados, siendo mayor la diferencia cuanto mayor es el rebajamiento.

Del mismo modo, en arcos circulares el coeficiente crítico de pandeo es entre un 45.1% y un 47.7% inferior en arcos articulados que en arcos biempotrados, produciéndose también la mayor diferencia para los rebajamientos superiores.

Tabla 7.28. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	433598	431826	429561	427523	424576
25	277238	276062	274587	273257	271322
30	192439	191593	190557	189624	188272
35	141344	140715	139941	139258	138253
40	108192	107707	107111	106589	105816

Tabla 7.29. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	192048	196648	199057	200397	201743
25	122899	125842	127376	128233	129090
30	85338	87383	88448	89046	89639
35	62697	64194	64978	65416	65850
40	48001	49148	49746	50083	50416

Tabla 7.30. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	428205	428954	427935	426588	424192
25	273761	274204	273494	272611	271061
30	190005	190281	189789	189161	188077
35	139547	139747	139374	138913	138104
40	106818	106965	106680	106323	105704

Tabla 7.31. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	190483	195970	198727	200239	201678
25	121908	125404	127165	128124	129051
30	84649	87080	88301	88967	89609
35	62189	63977	64871	65360	65830
40	47612	48978	49664	50039	50400

De nuevo en la obtención del esfuerzo axil crítico puede comprobarse que las diferencias entre arcos parabólicos y circulares, a igualdad de sustentación, son pequeñas. En los arcos biempotrados, entre un 1 y un 13 por mil superior en los de directriz parabólica, tanto mayor cuanto menor es el rebajamiento. En arcos biarticulados, la diferencia aún es más pequeña, pues se pueden considerar iguales en rebajamientos de 1/10 y es un 8 por mil superior en arcos parabólicos con rebajamientos de 1/5.

En arcos con una directriz determinada, bien parabólica o bien circular, vuelven a darse diferencias importantes entre arcos biarticulados y biempotrados. Así, en arcos parabólicos, las diferencias entre el esfuerzo axil crítico obtenido para los apoyados es un 44.3% - 47.6% menor del que se obtiene en arcos biempotrados, creciendo la cifra con el rebajamiento. En arcos circulares sucede lo mismo, variando los porcentajes entre el 45.5% y el 47.7%.

Quizá más interesante que la obtención del esfuerzo axil crítico sea la determinación de la carga crítica de pandeo, más intuitiva para el ingeniero al venir definida como una carga uniforme.

Tabla 7.32. Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	25574	23187	20985	19079	16086
25	13055	11818	10677	9687	8128
30	7543	6823	6158	5580	4669
35	4745	4290	3870	3504	2927
40	3177	2871	2589	2343	1956

Tabla 7.33. Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	11187	10410	9560	8760	7413
25	5725	5326	4890	4479	3787
30	3312	3081	2828	2590	2189
35	2085	1940	1780	1630	1377
40	1397	1299	1192	1092	922

Tabla 7.34. Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	24967	22811	20739	18910	15998
25	12745	11626	10551	9600	8082
30	7363	6711	6084	5530	4643
35	4632	4220	3823	3473	2911
40	3101	2824	2558	2322	1944

Tabla 7.35. Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	11254	10491	9630	8815	7447
25	5760	5367	4925	4507	3804
30	3332	3105	2849	2606	2199
35	2098	1955	1793	1641	1384
40	1405	1309	1201	1099	927

La carga crítica se determina a partir del coeficiente crítico de pandeo, de modo que:

$$q_{cr} \cdot L = \alpha_{cr} \cdot m \cdot g$$

donde L representa la longitud del arco, m su masa y g la aceleración de la gravedad, tomada como 9.8 m/s^2 .

Introduciendo el valor de la masa del arco en función de la densidad del acero ρ (7800 kg/m^3) y del volumen del arco V y a su vez el volumen como producto del área de la sección transversal A (en el IPN 300, 69.1 cm^2) por la longitud L del arco:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot L$$

Operando, se obtiene el valor de la carga crítica de pandeo q_{cr} :

$$q_{cr} = \alpha_{cr} \cdot A \cdot \rho \cdot g \quad [7.1]$$

De este modo se puede comprobar la relación lineal que existe entre la carga crítica de pandeo q_{cr} y el coeficiente crítico de pandeo α_{cr} . Por tanto, todas las reflexiones realizadas con la variación del coeficiente crítico entre arcos parabólicos y circulares, y entre arcos biempotrados y biarticulados, son válidas para la carga crítica de pandeo.

Otra forma de determinar la carga crítica de pandeo puede ser mediante la aplicación de la Estática a un arco cargado con q_{cr} , pues:

$$q_{cr} \cdot L = 2 \cdot R_{z,cr} = 2 \cdot N_{cr} \cdot \sin \alpha$$

siendo $R_{z,cr}$ la reacción vertical correspondiente a la carga crítica de pandeo. Por tanto,

$$q_{cr} = \frac{2 \cdot N_{cr} \cdot \sin \alpha}{L} \quad [7.2]$$

Tanto el valor del esfuerzo axil crítico N_{cr} , como el del ángulo del arranque α y la longitud el arco L , se han tabulado, por lo que el resultado puede obtenerse por ambos caminos.

- IPN 400

De igual modo que con el perfil IPN 300, se ha procedido a determinar el coeficiente crítico de pandeo, el esfuerzo axil crítico y la carga crítica de pandeo, tanto para arcos parabólicos como circulares, lo que se resume en las tablas 7.36 a 7.47.

Tabla 7.36. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biempotrados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	850.279	773.336	702.489	641.359	546.113
25	433.100	392.872	355.776	323.671	273.334
30	249.932	226.390	204.664	185.831	156.208
35	157.124	142.199	128.420	116.464	97.621
40	105.144	95.103	85.829	77.778	65.073

Tabla 7.37. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biarticulados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	370.051	344.519	316.605	290.305	246.110
25	189.303	176.162	161.802	148.270	125.512
30	109.499	101.873	93.541	85.689	72.478
35	68.936	64.126	58.871	53.918	45.583
40	46.174	42.947	39.423	36.102	30.511

Tabla 7.38. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biempotrados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	830.199	760.912	694.377	635.822	543.255
25	422.834	386.509	351.611	320.819	271.849
30	243.995	222.707	202.250	184.176	155.342
35	153.387	139.880	126.898	115.419	97.073
40	102.642	93.549	84.809	77.077	64.705

Tabla 7.39. Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biarticulados.					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	372.249	347.181	318.902	292.138	247.237
25	190.439	177.533	162.984	149.213	126.092
30	110.159	102.669	94.227	86.237	72.815
35	69.353	64.628	59.303	54.263	45.796
40	46.453	43.281	39.713	36.333	30.654

Coincide con lo estudiado para el perfil IPN 300, pues analizando las tablas 7.36 a 7.38 se puede comprobar que el coeficiente crítico de pandeo es entre un 6 y un 24 por mil mayor en arcos biempotrados de directriz parabólica que en los circulares. Las diferencias mayores se producen en los arcos más peraltados. Sucede lo contrario en los arcos biarticulados, pues son los arcos de directriz circular los que presentan un coeficiente crítico de pandeo superior al de los arcos parabólicos, entre un 5 y un 8 por mil, produciéndose la mayor diferencia en los arcos con una relación flecha-luz de 1/6. Por tanto, el resultado es similar al obtenido para el IPN 300.

Si se analiza el coeficiente crítico de pandeo entre arcos biempotrados y biarticulados, sí se obtienen diferencias importantes. En arcos parabólicos, el coeficiente crítico de pandeo es entre un 43.5% y un 46.9% inferior en los arcos biarticulados que en los empotrados, siendo mayor esta diferencia cuanto mayor es el rebajamiento y la luz. Del mismo modo, en arcos circulares el coeficiente crítico de pandeo es entre un 44.8% y un 47.4% inferior en arcos articulados que en arcos biempotrados, dándose las mayores divergencias en los arcos con mayor luz y rebajamiento.

Tabla 7.40. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	1294805	1290002	1283588	1277844	1269385
25	827394	824049	819743	815942	810299
30	574069	571657	568598	565893	561927
35	421548	419729	417455	415439	412498
40	322634	321220	319464	317918	315643

Tabla 7.41. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	572543	586302	593476	597535	601542
25	366358	375137	379733	382314	384870
30	254388	260479	263655	265447	267219
35	186885	191358	193691	195005	196303
40	143079	146501	148286	149293	150282

Tabla 7.42. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	1279171	1281832	1279042	1275205	1268392
25	817127	818587	816652	814078	809566
30	566874	567814	566401	564573	561375
35	416231	416870	415807	414447	412075
40	318549	319021	318195	317141	315314

Tabla 7.43. Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	567940	584306	592520	597042	601.379
25	363415	373867	379101	381985	384745
30	252341	259588	263223	265222	267136
35	185381	190704	193369	194831	196240
40	141923	146001	148038	149158	150235

Se repite de nuevo el resultado del perfil inferior. Las diferencias en el esfuerzo axil crítico entre arcos parabólicos y circulares, a igualdad de sustentación, son pequeñas. En los arcos biempotrados, entre un 1 y un 13 por mil superior en los arcos con directriz parabólica, tanto mayor cuanto menor es el rebajamiento. En arcos biarticulados, la diferencia se reduce, pues se pueden considerar iguales en rebajamientos de 1/10 y es un 8 por mil superior en arcos parabólicos con rebajamientos de 1/5.

En arcos con una directriz determinada, bien parabólica o bien circular, vuelven a darse diferencias importantes entre arcos biarticulados y biempotrados. Así, en arcos parabólicos las diferencias entre el esfuerzo axil crítico obtenido para los apoyados es un 44.2% - 47.6% menor del que se obtiene en arcos biempotrados, creciendo la cifra con el rebajamiento. En arcos circulares sucede lo mismo, variando los porcentajes entre el 44.4% y el 47.0%.

Tabla 7.44. Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	76694	69754	63364	57850	49259
25	39065	35437	32091	29195	24655
30	22544	20420	18461	16762	14090
35	14172	12826	11583	10505	8805
40	9484	8578	7742	7016	5870

Tabla 7.45. Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	33378	31075	28558	26185	22199
25	17075	15890	14594	13374	11321
30	9877	9189	8437	7729	6537
35	6218	5784	5310	4863	4112
40	4165	3874	3556	3256	2752

Tabla 7.46. Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	74883	68634	62632	57351	49001
25	38139	34863	31715	28938	24521
30	22008	20088	18243	16613	14012
35	13835	12617	11446	10411	8756
40	9258	8438	7650	6952	5836

Tabla 7.47. Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg/m).					
Luz (m)	Rebajamiento				
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
20	33577	31315	28765	26351	22301
25	17177	16013	14701	13459	11373
30	9936	9261	8499	7779	6568
35	6256	5829	5349	4894	4131
40	4190	3904	3582	3277	2765

Como se ha comentado anteriormente, al ser la carga crítica directamente proporcional al coeficiente crítico de pandeo, las reflexiones que pueden extraerse son absolutamente coincidentes con las manifestadas para dicho coeficiente.

3.1.1. Comprobación de resultados.

Tras la realización de gran número de cálculos, se puede establecer que las expresiones empíricas presentadas en el Capítulo 6 y refrendadas por algunas normas como las Reglas CB-71, son conservadoras respecto a los valores presentados de los esfuerzos axiales críticos de pandeo contenidos en las tablas 7.28 a 7.31 y 7.40 a 7.43, y de las cargas críticas de pandeo definidas en las tablas 7.32 a 7.35 y 7.44 a 7.47.

Así, las expresiones proporcionadas para arcos de sección constante articulados, sometidos a una carga uniforme, viene dada por la expresión aproximada:

$$N_{cr} \cong \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [7.3]$$

donde s es la longitud del arco.

Asimismo, esta expresión es corregida por Argüelles (1996) para arcos articulados de directriz parabólica *no suficientemente rebajados*, y propone:

$$N_{cr} = \left(\pi^2 - 16 \cdot \frac{f^2}{l^2} \right) \cdot \frac{E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [7.4]$$

Para arcos parabólicos biempotrados, sometidos a una carga uniforme, la expresión simplificada recomendada por Argüelles (1996) es:

$$N_{cr} \cong \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{\left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad [7.5]$$

En arcos circulares sólo aparecen expresiones para una hipótesis de carga radial o hidrostática, situación extremadamente importante para arcos circulares de presas, pero que se aleja del cálculo a pandeo en estructuras de construcción. Por ello, para comprobar resultados únicamente se dispondrá de la expresión genérica [7.3] dada para arcos biarticulados. Galambos (1998) indica los valores de la carga crítica de pandeo para arcos circulares sometidos a una carga uniformemente distribuida según su eje, situación exacta a la estudiada en este trabajo, pero con el inconveniente de que el arco viene definido por el ángulo que abarca y las relaciones flecha-luz no se ajustan a fracciones manejables.

- Arcos parabólicos

En arcos biarticulados, si se aplica la expresión [7.3], se obtienen valores inferiores en un 5-15% a los proporcionados por las tablas referidas.

En arcos biempotrados, con la expresión [7.5] como referencia, se obtienen valores del esfuerzo axil crítico de pandeo inferiores en un 10-25 %. El motivo de este aumento de la divergencia se puede intuir al analizar los coeficientes de pandeo entre arcos parabólicos biempotrados y biarticulados. Se puede comprobar que la relación siempre está por encima de 2 (entre 2.10 y 2.28), lo que significa que si únicamente se aplica este factor para calcular un parámetro cualquiera se incrementa aún más la diferencia y de ahí los porcentajes obtenidos.

Con respecto a la recomendación de Argüelles para *arcos no muy rebajados*, dado que la expresión [7.1] ya es claramente conservadora, su propuesta incrementa las diferencias obtenidas, pues el paréntesis siempre es menor que el valor de π^2 , por lo que por este método se obtienen esfuerzos axiales críticos inferiores a los determinados por [7.3].

Si se emplean los factores recomendados por Galambos (1998) para determinar cargas críticas de pandeo, las diferencias obtenidas son inferiores al 5%, con independencia del tipo de sustentación.

- Arcos circulares

Para arcos biarticulados el cálculo mediante autovalores proporciona esfuerzos axiles críticos más cercanos que en el caso anterior, y no siempre se obtiene que los valores proporcionados mediante la aplicación de [7.3] están del lado de la seguridad, pues para los arcos de menor longitud y más peraltados, la diferencia es de hasta el 5%. Por el contrario, cuando se aumenta la luz y el rebajamiento, los valores determinados mediante [7.3] están del lado de la seguridad, con diferencias alcanzadas de hasta el 10%.

3.2. Cálculo no lineal.

Utilizando como herramienta de cálculo la aplicación informática ANSYS, se ha efectuado un análisis no lineal para obtener la carga crítica de pandeo en los tipos de arco estudiados.

Este análisis consiste en considerar los efectos provocados por el cambio de forma de la estructura al deformarse, teniendo en cuenta pequeñas imperfecciones en el arco.

Así, introduciendo en el nodo que más se deforma en el análisis estático una imperfección muy pequeña, se comienza un nuevo proceso de cálculo utilizando el método de Newton-Raphson, que finaliza con la convergencia en algún estado de carga.

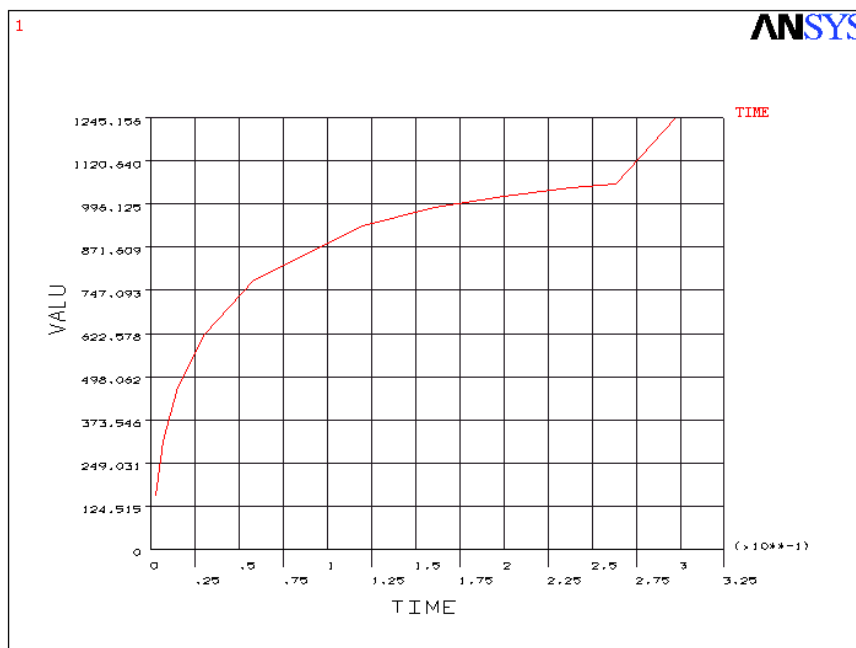


Figura 7.25. Análisis de pandeo no lineal en un arco circular biempotrado de 30 m de luz y 1/6 de rebajamiento

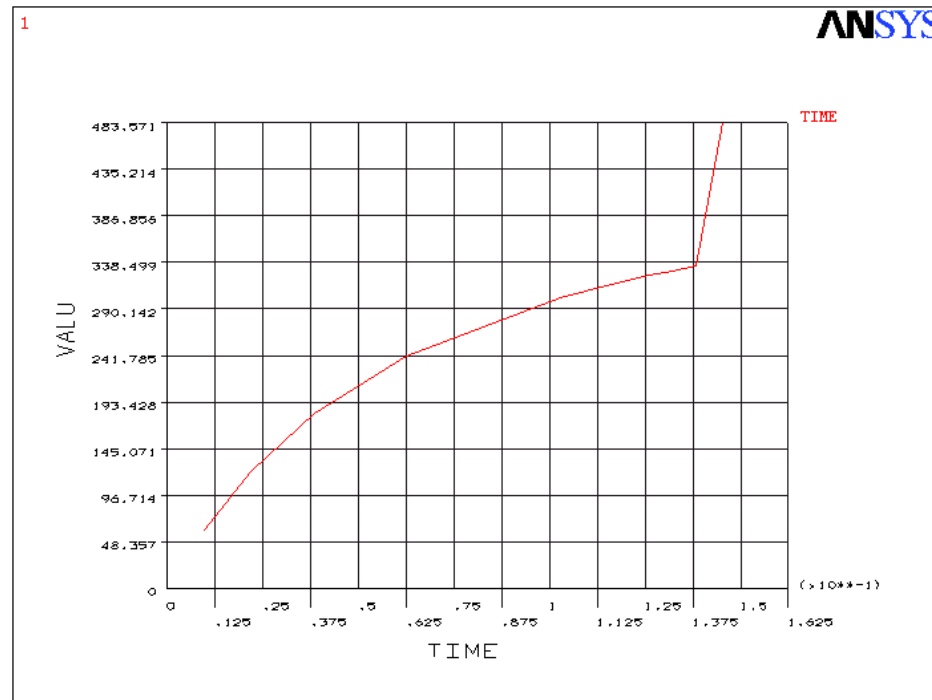


Figura 7.26. Análisis de pandeo no lineal en un arco circular biarticulado de 30 m de luz y 1/8 de rebajamiento

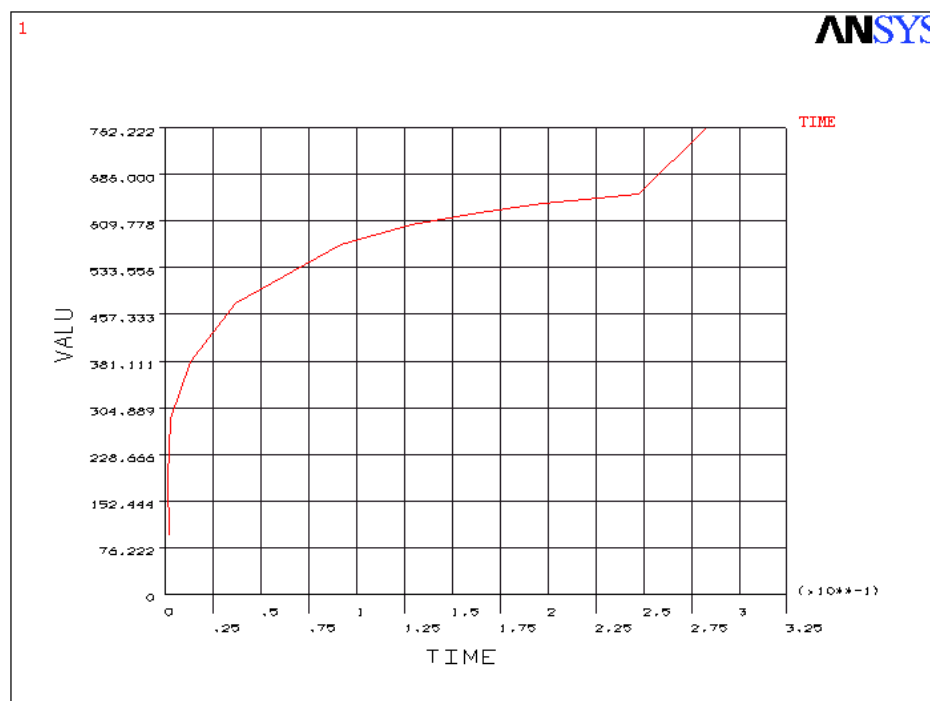


Figura 7.27. Análisis de pandeo no lineal en un arco parabólico biempotrado de 40 m de luz y 1/8 de rebajamiento

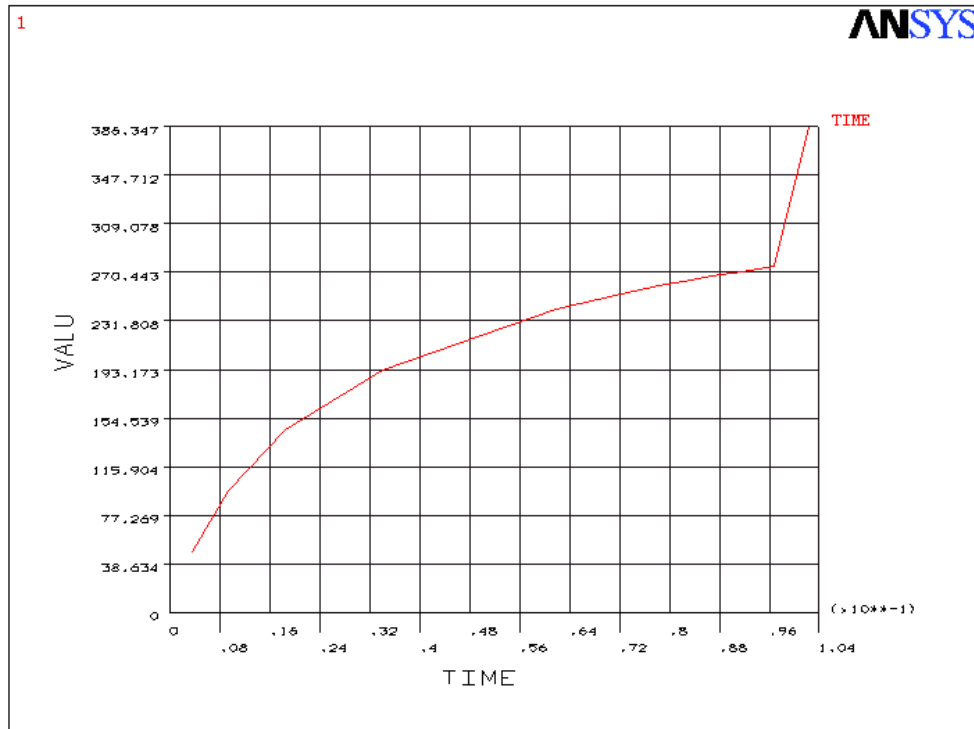


Figura 7.28. Análisis de pandeo no lineal en un arco parabólico biarticulado de 40 m de luz y 1/7 de rebajamiento

En las figuras 7.25 a 7.28 se presentan cuatro ejemplos de análisis no lineal en arcos circulares y parabólicos, biempotrados y biarticulados.

La obtención de la carga crítica se realiza a partir de la ordenada de las gráficas, correspondiendo con un salto que representa el momento en que la estructura pandea.

Al ser la hipótesis de carga una carga uniformemente distribuida a lo largo del eje del arco, el incremento de la variable que representa a la gravedad g en función del tiempo se adapta perfectamente a la situación de trabajo. Así, por ejemplo, en la figura 7.28, la ordenada g_{cr} es igual a 275.03, y señala el valor para el cual se produciría el pandeo.

Como se ha indicado anteriormente, existe una relación lineal entre la carga crítica de pandeo y la aceleración de la gravedad, tal y como refleja la expresión [7.1]. De esta forma se obtiene la carga crítica de pandeo, que en este caso es:

$$q_{cr} = g_{cr} \cdot \rho \cdot A = 275.03 \cdot 7800 \cdot 1.18 \cdot 10^{-2} / 10 = 2531 \text{ kg/m}$$

Los valores que se obtienen son, para arcos parabólicos empotrados, un 10-15% inferiores a los obtenidos con el cálculo por autovalores. En los arcos

circulares biempotrados la diferencia asciende a un 15-20%. En arcos parabólicos biarticulados sigue creciendo hasta alcanzar un 25-30%, que se convierte en los arcos circulares biarticulados en un 30-35%. Se puede apreciar cómo influye la forma de la curva del arco y el tipo de sustentación, siendo los más sensibles a las imperfecciones los arcos circulares biarticulados.

4. Conclusiones.

Desde el punto de vista estético, es difícil diferenciar entre una parábola de segundo grado y un arco de circunferencia, a igualdad de luz y de flecha. Las diferencias son prácticamente imperceptibles. Basta para ello analizar los puntos en los que se discretiza un arco parabólico y un arco circular.

En las tablas 7.48 y 7.49 se presenta la discretización efectuada en arcos de 30 y 40 m de luz, con flechas de 5 m, que se corresponde a rebajamientos de 1/6 y 1/8, respectivamente. Puede comprobarse que los cambios de las coordenadas se producen en el primer o segundo decimal, esto es, en los decímetros o en los centímetros, lo que teniendo en cuenta las luces importantes que se manejan hace que sea difícil determinar a simple vista cual es la directriz parabólica y cual es la circular.

Tabla 7.48 Comparación entre las directrices circular y parabólica en arcos de 30 m de luz y 5 m de flecha, discretizados en 10 tramos.				
Nodo	Arcos circulares		Arcos parabólicos	
	x (m)	z (m)	x (m)	z (m)
0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	2.691	1.760	2.744	1.662
2	5.586	3.160	5.636	3.051
3	8.636	4.176	8.665	4.108
4	11.791	4.793	11.804	4.773
5	15.000	5.000	15.004	5.000
6	18.209	4.793	18.205	4.772
7	21.364	4.176	21.343	4.106
8	24.414	3.160	24.372	3.048
9	27.309	1.760	27.263	1.658
10	30.000	0.000	30.000	0.000

Tabla 7.49 Comparación entre las directrices circular y parabólica en arcos de 40 m de luz y 5 m de flecha, discretizados en 10 tramos.				
Nodo	Arcos circulares		Arcos parabólicos	
	x (m)	z (m)	x (m)	z (m)
0	0.000	0.000	0.000	0.000
1	3.765	1.777	3.790	1.715
2	7.685	3.177	7.709	3.111
3	11.724	4.186	11.738	4.147
4	15.842	4.796	15.848	4.785
5	20.000	5.000	20.003	5.000
6	24.158	4.796	24.157	4.784
7	28.276	4.186	28.268	4.146
8	32.315	3.177	32.297	3.110
9	36.235	1.777	36.215	1.713
10	40.000	0.000	40.000	0.000

En principio se justifica la utilización de la parábola frente a la circunferencia porque representa la curva antifunicular de una carga uniformemente repartida sobre el arco. Sin embargo, al someter a un arco parabólico y a otro circular a la misma hipótesis de carga, no necesariamente vertical, se puede comprobar cómo efectivamente los esfuerzos en el arco parabólico son menores que en el circular, pero realmente en una pequeña magnitud.

Con respecto a las condiciones de sustentación, es tradición el alabar el mejor comportamiento del arco biempotrado frente al biarticulado (Torroja, 1996; Fernández Casado, 1955). Atendiendo únicamente a resistencia, si la sección de los arcos es constante, la influencia de la directriz es superior a la que tiene las condiciones de sustentación. Los esfuerzos tampoco difieren excesivamente entre un arco biempotrado y el mismo arco con los extremos apoyados. Sin embargo, sí son mayores las deformaciones que experimenta el arco biarticulado frente al de extremos empotrados. Sin embargo, si se analiza el pandeo, se puede constatar una mayor resistencia ante este fenómeno en arcos empotrados que en arcos biarticulados, lo que se manifiesta en mayores valores de las cargas críticas de pandeo que se obtienen en arcos biempotrados.

Introducidos en el problema del pandeo, puede asegurarse la mayor resistencia de los arcos parabólicos frente a los circulares, con independencia de las condiciones de sustentación.

De los análisis efectuados utilizando la metodología de los autovalores, se propone la tabla 7.50 para la determinación de la carga crítica de pandeo en arcos parabólicos y circulares, a través de un coeficiente K_{cr} .

Tabla 7.50 Coeficiente K_{cr} para la determinación de la carga crítica q_{cr} en arcos simétricos.						
Tipología		Rebajamiento				
		1/5	1/6	1/7	1/8	1/10
Arcos parabólicos	Biempotrados	131.2	109.8	94.4	82.9	66.8
	Biarticulados	57.5	49.5	43.2	38.2	31.0
Arcos circulares	Biempotrados	130.1	109.0	93.8	82.4	66.6
	Biarticulados	58.8	50.3	43.7	38.6	31.3

$$q_{cr} = K_{cr} \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} \quad [7.6]$$

siendo E el módulo de elasticidad del acero, I el momento de inercia del perfil elegido y L la longitud del arco, que se puede obtener de las tablas 7.20 y 7.21, dependiendo de la directriz del arco.

A partir de este valor también se puede obtener el del esfuerzo axial crítico N_{cr} , recurriendo a la expresión [7.2] y a las tablas 7.22 y 7.23, donde se recoge el valor de α en los arcos estudiados.

Por último, la utilización del método de los elementos finitos ha sido una perfecta excusa para introducirme en un mundo lleno de posibilidades, en el que quizás las estructuras de barras sean el ámbito en que su aportación sea menor, pues es cubierto con sistemas matriciales tradicionales.

El elemento de pórtico plano, tanto el que sigue la formulación de Timoshenko como el que se define en función del modelo de Euler-Bernoulli, muestra una belleza innegable en su definición, en su desarrollo y en la sencillez de aplicación. La secuencia que conduce a la obtención de todas las expresiones, alterada para introducir los conceptos matemáticos necesarios, culmina con unas aplicaciones informáticas sencillas, desarrolladas en la hoja de cálculo Microsoft Excel, que permiten calcular los arcos introduciendo el menor número de datos posible.

Los resultados obtenidos mediante estas hojas de cálculo coincide con el que proporcionan diversos programas matriciales, lo que era esperable al emplear elementos finitos con la misma distribución lineal de desplazamientos que se utiliza como base en los métodos matriciales.

Bibliografía

ANSYS. (2002). *Users manual revision 7.0*. Swanson Analysis System Inc.

Antuña Bernardo, J; Pedregal Boedo, J.M. (2002). *El archivo de don Eduardo Torroja*. Ingeniería Civil, nº 127. pp 3-9.

Argüelles Alvarez, R. (1981). *Cálculo de estructuras. Tomo I*. Servicio de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes. Madrid.

Argüelles Alvarez, R. (1986). *Cálculo de estructuras: Programación. Tomo III*. Fundación Conde del Valle de Salazar. Madrid.

Argüelles Alvarez, R; Argüelles Bustillo, R. (1996). *Análisis de estructuras. Teoría, problemas y programas*. Fundación Conde del Valle de Salazar. Madrid.

Argüelles Alvarez, R; Argüelles Bustillo, R; Arriaga Martitegui, F; Atienza Reales, J.R. (1999). *Estructuras de acero. Cálculo, Norma Básica y Eurocódigo*. Bellisco. Madrid.

Argüelles Alvarez, R; Arriaga Martitegui, F; Martínez Calleja, J.J. (2000). *Estructuras de madera. Diseño y Cálculo*. 2ª edición. Asociación de Investigación Técnica de las Industrias de Madera y Corcho AITIM. Madrid.

Argüelles Alvarez, R; Argüelles Bustillo, R; Arriaga Martitegui, F; Atienza Reales, J.R; Martínez Calleja, J.J. (2001). *Estructuras de acero. Uniones y sistemas estructurales*. Bellisco. Madrid.

Ariza Moreno, P; Sáez Pérez, A. (1999). *Método de los elementos finitos. Introducción a ANSYS*. Universidad de Sevilla. Sevilla.

Arndt, M. (2001). *O método dos elementos compostos aplicado à análise de vibrações*. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

Arnold, D.N. (1981). *Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem*. Numerische Mathematik, vol. 37. pp 405-421.

Babůska, I; Suri, M. (1992). *Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems*. Numerische Mathematik, vol. 62. pp 439-463.

Bathe, K.J; Cimento, A.P. (1980). *Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 22 (1). pp 59-85.

Bathe, K.J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice Hall. New Jersey.

Benedetti, A; Tralli, A. (1989). *A new hybrid f.e. model for arbitrarily curved beam-I. Linear analysis*. Computers and Structures, vol. 33. pp 1437-1449.

Bernadou, M; Ducatel, Y. (1982). *Approximation of general arch problems by straight beam elements*. Numerische Mathematik, vol. 40. pp 1-29.

Boresi, A.P; Chong, K.P; Saigal, S. (2003). *Approximate solution methods in engineering mechanics*. Second edition. John Wiley and Sons. New York.

Celigüeta, J.T. (1998). *Curso de análisis estructural*. Ediciones Universidad de Navarra S.A. Pamplona.

Chapelle, D; Stenberg, R. (1999). *Stabilized finite element formulations for shells in a bending dominated state*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 36. pp 32-73.

Chapelle, D. (1997). *A locking-free approximation of curved rods by straight beam elements*. Numerische Mathematik, vol. 77. pp 299-322.

Chenais, D; Paumier, J.C. (1994). *On the locking phenomenon for a class of elliptic problems*. Numerische Mathematik, vol. 67. pp 427-440.

Cheng, X; Han, W; Huang, H. (1997). *Finite element methods for Timoshenko beam, circular arch and Reissner-Mindlin plate problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 79 (2). pp 215-234.

Ciarlet, P.G. (1978). *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland. Amsterdam.

Crisfield, M.A. (1986). *Finite element and solution procedures for structural analysis. Volume I: Linear analysis*. Pineridge Press. London.

Crisfield, M.A. (2000). *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 2: Advanced Topics*. John Wiley and Sons. New York.

Cudós Samblancat, V. (1978). *Cálculo de estructuras de acero. Tomo 1: Teoría*. H. Blume Ediciones. Madrid.

Cudós Samblancat, V; Quintero Moreno, F. (1988) *Estructuras metálicas. La pieza aislada. Inestabilidad. U.D.1 II*. Fundación Escuela de la Edificación. Madrid.

Dávila Baz, J.A; Pajón Permuy, J. (1997) *Teoría de arcos y método de Cross aplicados al cálculo de estructuras*. Universidad de Huelva. Huelva.

Dischinger, F. (1937). *Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken*. Der Bauingenieur, 1937/33-34, pp 487-520; 1937/35-36, pp 539-552; 1937/39-40, pp 595-621.

Dorfi, H.R; Busby, H.R. (1994). *An effective curved composite beam finite element based on the hybrid-mixed formulation*. Computer and Structures, vol. 53. pp 43-52.

Engel, H. (2001). *Sistemas de estructuras*. Gustavo Gili. Barcelona.

Escrig, F. (1985). *Pandeo de estructuras. Cálculo de la carga crítica de estructuras de edificación en régimen elástico y en rotura*. Publicaciones de la Universidad de Sevilla. Sevilla.

Eurocódigo 3. (1996). *Proyecto de estructuras de acero*. Asociación Española de Normalización y Certificación (AENOR). Madrid.

Eurocódigo 5. (1999). *Proyecto de estructuras de madera*. Asociación Española de Normalización y Certificación (AENOR). Madrid.

Felippa, C.A. (2001a). *Introduction to finite element methods*. Aerospace Engineering Sciences Department of the University of Colorado. Boulder.

Felippa, C.A. (2001b). *Nonlinear finite element methods*. Aerospace Engineering Sciences Department of the University of Colorado. Boulder.

Fernández Casado, C; Fernández Casado, J.L. (1952). *Cálculo de estructuras reticulares*. 6ª edición. Dossat. Madrid.

Fernández Casado, C. (1955). *Cálculo de arcos*. Dossat. Madrid.

Franca, L.P; Russo, A. (1997). *Unlocking with residual-free bubbles*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 142 (3-4). pp 361-364.

Galambos, T.V. (1998). *Guide to stability design criteria for metal structures*. Fifth edition. John Wiley & Sons, Inc. New York.

García Badell, I. (1999). *Curso de cálculo de estructuras*. Bellisco. Madrid.

García de Arangoá, A. (1971). *Arcos*. Escuela Técnica Superior de Arquitectura (UPM). Madrid.

Garcimartín Molina, M.A. (2000). *Edificación agroindustrial: estructuras metálicas*. Mundiprensa. Madrid.

GiD (2003). *The personal pre and postprocesor*. Release 7.1. CIMNE. Barcelona.

Goicolea Ruigómez, J.M. (2003). *Modelos estructurales: vigas 2D*. Curso de doctorado impartido en ETSI de Caminos de la Universidad de Granada. Granada.

González Taboada, J.A. (1989). *Tensiones y deformaciones en materiales elásticos*. Universidade de Santiago de Compostela. Servicio de Publicacións e Intercambio Científico, ed. Santiago de Compostela.

Grosh, K; Pinsky, P.M. (1996). *Design of Galerkin generalized least squares methods for Timoshenko beams*. Computer Methods Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 132. pp 1-16.

Habbal, A; Chenais, D. (1992). *Deterioration of a finite element method for arch structures when thickness goes to zero*. Numerische Mathematik, vol. 62. pp 321-341.

Hughes, T.J.R. (2000). *The finite element method: lineal static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications Inc. Mineola (New York).

Hughes, T.J.R; Taylor, R.L; Kanoknukulchai, W. (1977). *A simple and efficient element for plate bending*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 11. No. 10. pp 1529-1543.

Irons, B.M. (1966). *Engineering application of numerical integration in stiffness method*. Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, vol 14. pp 2035-2037.

Kattan, P. (2003). *Matlab guide to finite elements: an interactive approach*. Springer Verlag. Berlin.

Kikuchi, F. (1975). *On the validity of the finite element analysis of circular arches represented by an assemblage of straight beam elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 5. pp 253-276.

Kikuchi, F. (1982). *Accuracy of some finite element models for arch problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 35. pp 315-345.

Leontovich, V. (1983). *Pórticos y arcos*. CECSA. México D.F.

López Perales, J.A. (2003). *Cálculo matricial de pórticos biempotrados a dos aguas simétricos*. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola. Ciudad Real. Ciudad Real.

Loula, A.F.D; Franca, L.P; Hughes, T.J.R; Miranda, I. (1987). *Stability, convergence and accuracy of a new finite element method for the circular arch problem*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 63. pp 281-303.

Luthe, R; Olivera, A; Schutz, F. (1984). *Métodos numéricos*. Limusa. México.

MacNeal, R.H. (1978). *A simple quadrilateral shell element*. Computers and Structures, vol. 8. pp 175-183.

Metal3D. (2003). *Manual del usuario*. CYPE Ingenieros. Alicante.

Moreno García, F. (1992). *Arcos y bóvedas*. 23ª edición. CEAC. Barcelona.

NBE EA-95(1995). *Estructuras de acero en edificación*. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo. Madrid.

Oden, J.T; Reddy, J.N. (1997). *On locking-free shear deformable beam finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 149, issues 1-4. pp 113-132.

Oliver Alemany, M; Ortiz Berrocal, L. (1970). *Resistencia de materiales. Tomo II*. Litoprint. Madrid.

Oñate, E. (1995). *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*. 2ª edición. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

Oñate, E. (2002). *XII Curso de introducción al cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*. CIMNE y Structuralia. Barcelona.

Ortiz Berrocal, L. (2002). *Resistencia de materiales*. 2ª edición. McGraw-Hill. Madrid.

Quintas Ripoll, V. (1996). *Estructuras especiales en edificación. Análisis y cálculo. Segunda parte*. Rueda. Madrid.

Raveendranath, P; Singh, G; Pradhan, B. (1999). *A two-noded locking-free shear flexible curved beam element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 44. pp 265-280.

Rozalén Morales, D. (2000). *Cálculo estructural e instalaciones de pabellón polideportivo*. Proyecto Fin de Carrera de la Escuela de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real. Universidad de Castilla-La Mancha.

Pruneda, R.E. (2003). *Fundamentos matemáticos del MEF. Técnicas de cálculo numérico. Resolución de sistemas de ecuaciones en problemas lineales y no lineales. Métodos implícitos y explícitos*. Curso «El método de los elementos finitos en ingeniería civil». Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Castilla-La Mancha.

Przemienieck, J.S. (1968). *Theory of matrix structural analysis*. McGraw Hill. New York.

Ralston, A. (1970). *Introducción al análisis numérico*. Limusa-Wiley. México.

Regalado Tesoro, F. (1999). *Breve introducción a las estructuras y sus mecanismos resistentes*. CYPE Ingenieros. Alicante.

Saleeb, A.F; Chang, T.Y. (1987). *On the hybrid-mixed formulation of C^0 curved beam elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 60. pp 95-121.

Salvadori, M; Heller, R. (1998). *Estructuras para arquitectos*. 3ª edición. Kliczkowski Publisher. Buenos Aires.

Seguido Castellanos, E. (1999). *Estudio del fenómeno del pandeo en estructuras metálicas*. Proyecto Fin de Carrera de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Ciudad Real. Universidad de Castilla-La Mancha.

Taig, I.C. (1961). *Structural analysis by the matrix displacement method*. English Electric Aviation Report No. S017.

Timoshenko, S.P. (1989). *Resistencia de materiales*. Partes I y II. 16ª edición. Espasa-Calpe. Madrid.

Timoshenko, S.P; Goodier, J.N. (1961). *Teoría de la estabilidad elástica*. Ediar S.A. Editores. Buenos Aires.

Timoshenko, S.P; Young, D.H. (1981). *Teoría de las estructuras*. 2ª edición. URMO. Bilbao.

Torroja Miret, E. (1996). *Razón y ser de los tipos estructurales*. 8ª edición. Colección Textos Universitarios, nº 13. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Ciencias la Construcción Eduardo Torroja. Madrid.

Torroja, E. (1999). *Las estructuras de Eduardo Torroja*. Ministerio de Fomento. Madrid.

Vázquez, M. (1999). *Cálculo matricial de estructuras*. 2ª edición. Noela. Madrid.

Vázquez, M, López, E. (2001). *El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural*. Noela. Madrid.

Zerner, M. (1994). *An asymptotically optimal finite element scheme for the arch problem*. Numerische Mathematik, vol. 61. pp 117-143.

Zhang, Z. (1992a). *Arch beam models: Finite element analysis and superconvergence*. Numerische Mathematik, vol. 69. pp 117-123.

Zhang, Z. (1992b). *A note on the hybrid-mixed C^0 curved beam elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 95. pp 243-252.

Zhang, Z. (1995). *Locking and robustness in the finite element method for circular arch problem*. Numerische Mathematik, vol. 69 (4). pp 509-522.

Zienkiewicz, O.C; Lefebvre, D. (1987). *The field mixed approximation and the plate bending problem*. Communications in Applied Numerical Methods, vol. 3. pp 301-309.

Zienkiewicz, O.C; Taylor, R.L. (1994). *El método de los elementos finitos. Mecánica de sólidos y fluidos. Dinámica y no linealidad*. 4ª edición. McGraw-Hill y CIMNE. Barcelona.

Zienkiewicz, O.C; Taylor, R.L. (2000a). *The finite element method. Volume 1: The basis*. Fifth edition. Butterworth-Heinemann. Oxford.

Zienkiewicz, O.C; Taylor, R.L. (2000b). *The finite element method. Volume 2: Solid mechanics*. Fifth edition. Butterworth-Heinemann. Oxford.